

Wachstumsprozesse

Wächst der Bestand pro Einheit um den gleichen **Wachstumsfaktor a**, spricht man vom **exponentiellen Wachstum**.

Der **Anfangswert b** hat sich nach x Einheiten somit x-mal „**ver-a-facht**“:

$$N(x) = b \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{x\text{-mal}} = b \cdot a^x$$

Wachstumsgleichung: $N(x) = b \cdot a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$

Für $a > 1$: exponentielle Zunahme

Für $a < 1$: exponentielle Abnahme

Bsp.:

x	0	1	2	3	4
N(x)	3,1	3,57	4,10	4,71	5,42

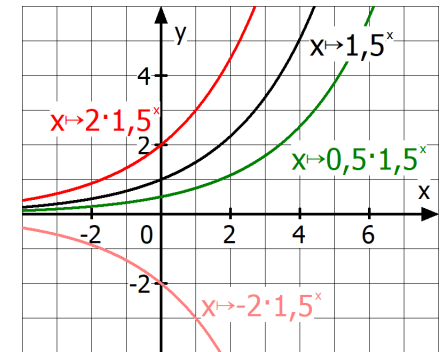
$\xrightarrow{-1,15} \xrightarrow{-1,15} \xrightarrow{-1,15} \xrightarrow{-1,15}$

Wachstumsgleichung: $N(x) = 3,1 \cdot 1,15^x$

$b = N(0) = 3,1$; $a = 1,15 = 1 + 0,15$ also Wachstum um 15% pro Einheit.

Exponentialfunktionen $x \mapsto b \cdot a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|b)$
- Der Graph der Funktion $x \mapsto b \cdot a^x$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion $x \mapsto a^x$ mit dem Faktor $|b|$ in y-Richtung gestreckt. Für $b < 0$ ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.



Das Bild zeigt nur Graphen mit Wachstumsfaktoren $a > 1$.

Logarithmen

Der **Logarithmus einer positiven Zahl u zur positiven Basis b** ist diejenige Zahl x, mit der man b potenzieren muss, um u zu erhalten:

$\log_b(u)$ ist die Zahl, welche die Gleichung $b^x = u$ löst (mit $b, u \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$).

- Bsp.:
- i) $\log_2(8) = 3$, weil die Zahl 3 die Gleichung $2^x = 8$ löst.
 - ii) $\log_5(100)$ ist eine Zahl zwischen 2 und 3, weil $5^2 < 100$ und $5^3 > 100$.
 - iii) $\log_{10}(10\,000) = 4$, weil $10^4 = 10\,000$.

Rechenregeln:

Allgemein gilt für $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$:

$$\log_b(b) = 1; \quad \log_b(1) = 0; \quad \log_b\left(\frac{1}{b}\right) = -1; \quad \log_b(b^c) = c; \quad \log_b(a^c) = c \cdot \log_b(a)$$

Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung tritt die Unbekannte nur im Exponenten auf. Kann diese Gleichung durch Anwenden bekannter Rechenregeln in die Form $c = b^x$ gebracht werden, erhält man die Lösung durch **Logarithmieren**: $x = \log_b(c)$. Lassen sich beide Seiten als Potenz zur gleichen Basis schreiben, kann man einen **Exponentenvergleich** machen.

1. Beispiel (Logarithmieren):

$$35 \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 7 \quad | : 35$$

$$5^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{5} \quad | \log_5 \dots$$

$$\frac{x}{2} = \log_5\left(\frac{1}{5}\right) \quad | \cdot 2$$

$$x = -2$$

2. Beispiel: (Logarithmieren bzw. Exponentenvgl.)

$$27^{x+1} = 3^{2x-1}$$

$$(3^3)^{x+1} = 3^{2x-1}$$

$$3^{3(x+1)} = 3^{2x-1} \quad | \log_3 \dots \text{ bzw. Exponentenvgl.}$$

$$3x + 3 = 2x - 1 \quad | -2x - 3$$

$$x = -4$$

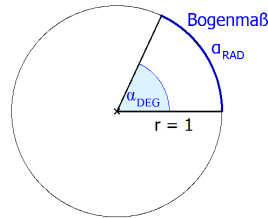
Das Bogenmaß

Am Taschenrechner können verschiedene Winkelmaße eingestellt werden:

i) Gradmaß mit DEG**ii) Bogenmaß mit RAD**

Das **Bogenmaß** α_{RAD} eines Winkels α_{DEG} ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

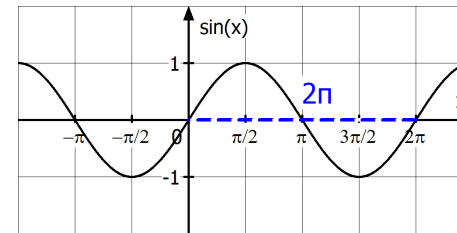
Umrechnungsformel:
$$\frac{\alpha_{\text{RAD}}}{2\pi} = \frac{\alpha_{\text{DEG}}}{360^\circ}$$



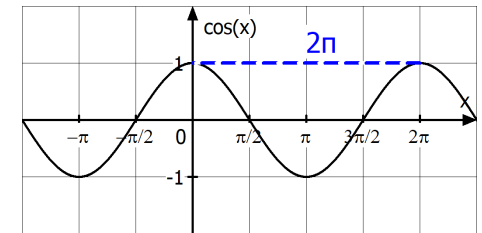
Besondere Werte:

Gradmaß α_{DEG}	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß α_{RAD}	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Hinweis: Bei Sinus- und Kosinusfunktionen verwendet man üblicherweise den RAD-Modus (siehe Kärtchen rechts und unten).

Sinus- und Kosinusfunktion**Sinusfunktion:** $x \mapsto \sin(x)$ 

- Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- Periode 2π
- Wertemenge: $W = [-1; +1]$
- Nullstellen: $x_N = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Kosinusfunktion: $x \mapsto \cos(x)$ 

- Die Kosinuskurve ist achsensymmetrisch zur y-Achse: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- Periode 2π
- Wertemenge: $W = [-1; +1]$
- Nullstellen: $x_N = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Die allgemeine Sinusfunktion

Die Parameter der Funktion $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bewirken gegenüber der Sinuskurve folgende Veränderungen:

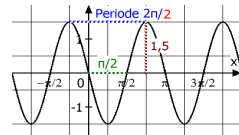
a: Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$. Die **Amplitude** beträgt $|a|$.
Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

b: Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$. Die **Periode** beträgt $\frac{2\pi}{|b|}$.
Für $b < 0$ ist der Graph zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.

c: Verschiebung um $|c|$ in x-Richtung ($c > 0$: nach rechts, $c < 0$: nach links).

d: Verschiebung um $|d|$ in y-Richtung ($d > 0$: nach oben, $c < 0$: nach unten)

Bsp.: $x \mapsto 1,5 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

**Zusammengesetzte Zufallsexperimente – Baumdiagramm**

Knotenregel: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, ist 1.

Produktregel (1. Pfadregel): Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

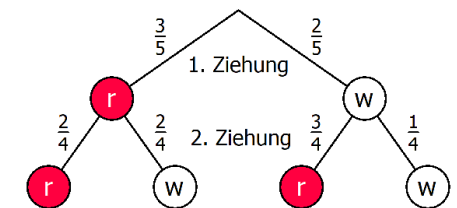
Summenregel (2. Pfadregel): Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit drei roten und zwei weißen Kugeln.

$$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}; \quad P(wr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{gleiche Farben}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



Die ganzrationale Funktion – Definition

Terme der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und den Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ($a_n \neq 0$) heißen **Polynome n-ten Grades**.

Eine Funktion, deren Term als Polynom geschrieben werden kann, bezeichnet man als **ganzrationale Funktion n-ten Grades**.

Beispiele:

- $f: x \mapsto 10x^5 - 7x^3 + 3$ ist eine ganzrationale Funktion fünften Grades. Die Koeffizienten des Polynoms sind $a_5 = 10$, $a_3 = -7$, $a_0 = 3$, $a_4 = a_2 = a_1 = 0$.
- Alle quadratischen Funktionen sind ganzrationale Funktionen zweiten Grades. Die Koeffizienten des Polynoms $p(x) = 2(x-3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19$ sind $a_2 = 2$, $a_1 = -12$, $a_0 = 19$.
- Alle linearen Funktionen sind ganzrationale Funktionen ersten Grades (z.B. $g: x \mapsto 0,5x + 3$) oder nullten Grades (z.B. $h: x \mapsto 5$).
- Die Funktion $q: x \mapsto 3x^{-1} = \frac{3}{x}$ ist nicht ganzrational.

Die ganzrationale Funktion – Grenzverhalten

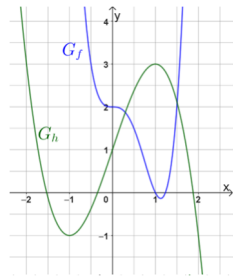
Die maximale Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion ist $D_{\max} = \mathbb{R}$.

Wenn die x -Werte sehr groß ($x \rightarrow \infty$) oder sehr klein ($x \rightarrow -\infty$) werden, nähert man sich den **Rändern des Definitionsbereichs**. Die Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion werden dort entweder sehr groß oder sehr klein. Man sagt: die Funktionswerten streben gegen $-\infty$ oder gegen $+\infty$.

Bei einer ganzrationalen Funktion bestimmt ausschließlich der Summand mit der **höchsten Potenz** ($a_n x^n$) das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Beispiele: Der Verlauf des Funktionsgraphen an den Rändern des Definitionsbereichs wird bei ...

- $f: x \mapsto \underline{4x^4} - 6x^3 + 2$ durch den Termbestandteil $\underline{4x^4}$ bestimmt. Der Graph G_f verläuft von links oben nach rechts oben.
- $h: x \mapsto \underline{-x^3} + 3x + 1$ durch den Termbestandteil $\underline{-x^3}$ bestimmt. Der Graph G_h verläuft von links oben nach rechts unten.

**Symmetrieuntersuchung allgemein**

Der Graph G_f einer Funktion f ist

- **achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems**, genau dann, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = f(x)$
- **punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems**, genau dann, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = -f(x)$

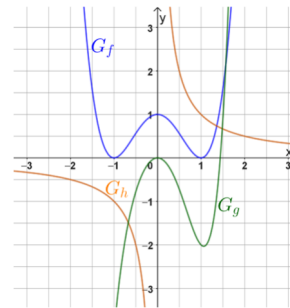
Beispiele für rechnerische Symmetrieuntersuchungen:

- $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$
 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$
 $\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

- $h: x \mapsto \frac{1}{x}$
 $h(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -h(x)$
 $\Rightarrow G_h$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

- $g: x \mapsto x^5 - 3x^2$ G_g weist keine übliche Symmetrie auf:

$$g(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^2 = -x^5 - 3x^2 \quad \text{– dies ist weder } g(x) \text{ noch } -g(x)$$

**Symmetrieuntersuchung im Spezialfall ganzrationaler Funktionen**

Kommen im Term einer ganzrationalen Funktion **nur**

- **gerade Exponenten** vor, so bezeichnet man die Funktion als **gerade**. Die Graphen gerader ganzrationaler Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch.
 Bsp.: $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$, weil $x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1x^0$ und 0 hier als gerader Exponent zählt.
- **ungerade Exponenten** vor, so bezeichnet man die Funktion als **ungerade**. Die Graphen ungerader ganzrationaler Funktionen sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
 Bsp.: $k: x \mapsto x^5 - 2x^3 + 4x = x^5 - 2x^3 + 4x^1$

Die ganzrationale Funktion – faktorisierte Form und Nullstellenbestimmung

Zur Nullstellenbestimmung einer ganzrationalen Funktion ist es hilfreich, den Funktionsterm z.B. durch **Ausklammern** oder Anwenden einer **binomischen Formel** oder der **Mitternachtsformel** zu **faktorisieren**. Einen Faktor der Form $(x - a)$ nennt man **Linearfaktor**.

1. **Beispiel:**

$$f(x) = \overbrace{2x^3 - 8x}^{\text{Polynomform}} = \overbrace{2x(x^2 - 4)}^{\text{Ausklammern}} = \overbrace{2x(x+2)(x-2)}^{\text{±bin.F.}} = \underbrace{2 \cdot (x-0)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x+2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Da ein Produkt 0 wird, wenn einer seiner Faktoren 0 ist, hat f somit die Nullstellen $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = -2$; $x_{N3} = 2$

$$2. \text{ Beispiel: } g(x) = \overbrace{2x^2 - 12x + 18}^{\text{Polynomform}} = \overbrace{2 \cdot (x^2 - 6x + 9)}^{\text{Ausklammern}} = \overbrace{2 \cdot (x-3)^2}^{\text{bin.F.}} = \underbrace{2 \cdot (x-3)^2}_{\text{Linearfaktor}}$$

⇒ Die Nullstelle von g ist: $x_{N1} = 3$.

3. **Beispiel:**

$$h(x) = \overbrace{4x^4 - 4x^3 - 3x^2}^{\text{Polynomform}} = \overbrace{4x^2 \left(x^2 - x - \frac{3}{4} \right)}^{\text{Ausklammern}} = \dots$$

Ist einer der Faktoren des Polynoms ein quadratischer Term, kann dieser mit der **Mitternachtsformel** weiter faktorisiert werden, um alle Nullstellen zu finden.

$$\text{Am obigen Bsp.: } x^2 - x - 0,75 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-0,75)}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -0,5$$

$$x_2 = 1,5$$

$$\Rightarrow h(x) = \dots = \overbrace{4x^2(x+0,5)(x-1,5)}^{\text{faktorisierte Form}} = \underbrace{4 \cdot (x-0)^2}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x+0,5)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x-1,5)}_{\text{Linearfaktor}}$$

⇒ Die Nullstellen von h sind: $x_{N1} = 0$, $x_{N2} = -0,5$ und $x_{N3} = 1,5$.

Die ganzrationale Funktion – Vielfachheit von Nullstellen

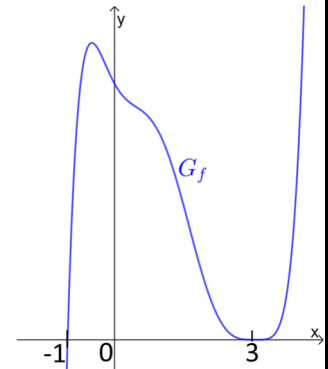
b heißt **k-fache Nullstelle** ($k \in \mathbb{N}$) von f , wenn sich der Funktionsterm von f in der Form $f(x) = (x - b)^k \cdot g(x)$ schreiben lässt, wobei $g(b) \neq 0$ ist. Man spricht von der **Vielfachheit k** der Nullstelle.

Die Vielfachheit einer Nullstelle bestimmt den Verlauf des Graphen in der Nähe dieser Nullstelle:

- liegt eine **gerade Vielfachheit** vor, so **berührt** der Graph die x -Achse.
- liegt eine **ungerade Vielfachheit** vor, so **schneidet** der Graph die x -Achse.

Beispiel: Beim Funktionsterm $f(x) = (x - 3)^4(x + 1)(x^2 + 1)$

ist $x = 3$ eine vierfache Nullstelle und $x = -1$ eine einfache Nullstelle. Der Faktor $x^2 + 1$ wird nie null.



Die Vorzeichentabelle am Beispiel einer ganzrationalen Funktion

Unterteilt man den Definitionsbereich einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe der Nullstellen in Intervalle, so ändert sich das Vorzeichen der Funktionswerte in diesen Teilintervallen nicht, der Graph verläuft dort ausschließlich über oder unter der x -Achse.

Beispiel: $f : x \mapsto (x - 3)^4(x + 1)(x^2 + 1) \Rightarrow$ Die Nullstellen sind $x_{N1} = -1$ und $x_{N2} = 3$.

	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < \infty$
$f(x)$	-	0	+	0	+
G_f	unter x-Achse	Nullstelle	über x-Achse	Nullstelle	unter x-Achse

Erklärung der zweiten Spalte: Für x -Werte aus dem Intervall $-\infty < x < -1$ ist der Faktor $(x + 1)$ negativ und die Faktoren $(x - 3)^4$ und $(x^2 + 1)$ sind positiv. Insgesamt ergibt sich also ein negativer Funktionswert („Minus mal Plus mal Plus“).

Die Pyramide (Teil 1)

Eine **Pyramide** ist ein geometrischer Körper mit einem **n-Eck als Grundfläche** und **n dreieckigen Seitenflächen**, die in einer gemeinsamen **Spitze S** zusammenlaufen.

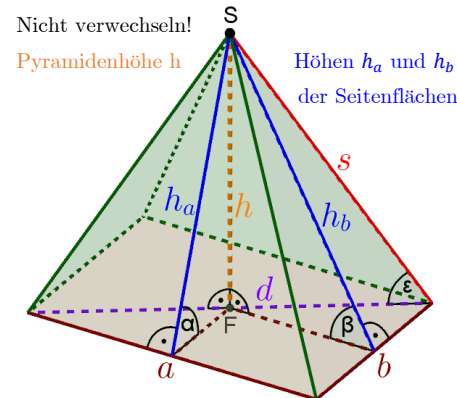
Eine Pyramide, bei der alle **Seitenkanten s** gleich lang sind, heißt **gerade Pyramide**. Die Spitze einer geraden Pyramide liegt senkrecht über dem Mittelsenkrechten-schnittpunkt ihrer Grundfläche.

In Pyramiden lassen sich verschiedene rechtwinklige Dreiecke finden. Mit dem Satz des Pythagoras können fehlende Streckenlängen bestimmt werden.

Beispiele an der abgebildeten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche:

$$h_a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$s^2 = h_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad d^2 = a^2 + b^2$$



Die Pyramide (Teil 2)

In der Pyramide links schließen die Seitenflächen die Winkel α und β mit der Grundfläche der Pyramide ein, die Seitenkanten schließen den Winkel ϵ mit der Grundfläche ein.

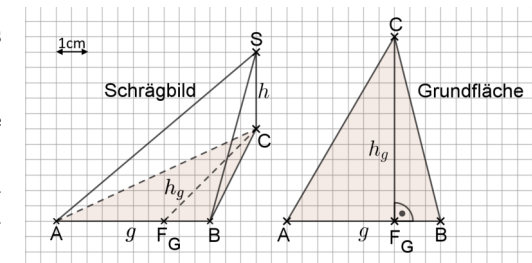
Es gilt beispielsweise $\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{b}{2}} = \frac{2h}{b}$ und $\sin(\epsilon) = \frac{h}{s}$

Eine Pyramide mit dem **Grundflächeninhalt G**, dem **Mantelflächeninhalt M** und der **Höhe h** besitzt:

- $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
- $O_{\text{Pyramide}} = G + M$

Pyramiden, die nicht gerade sind, werden als **schiefe Pyramiden** bezeichnet.

Beispiel: Die Abbildung zeigt eine schiefe Pyramide mit 2,5cm Höhe, deren Grundfläche 5cm breit und 6cm hoch ist. Der Eckpunkt C der Grundfläche ist im Beispiel der Höhenfußpunkt der Pyramidenhöhe.



Der Kegel

Verbindet man alle Punkte einer Kreislinie geradlinig mit einem weiteren Punkt, welcher nicht in der gleichen Ebene wie der Kreis liegt, so erhält man einen **Kegel**.

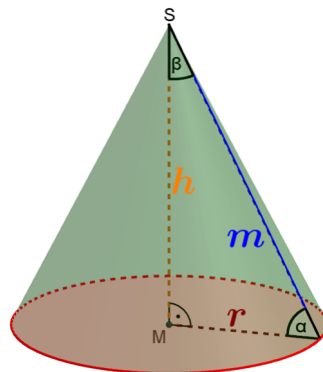
Wenn der Höhenfußpunkt der Kegelhöhe mit dem Mittelpunkt des Grundkreises übereinstimmt, liegt ein **gerader Kegel** vor, andernfalls ein **schiefer Kegel**.

Ein gerader Kegel mit dem **Grundflächenradius r**, der **Höhe h** und der **Mantellinie m** besitzt:

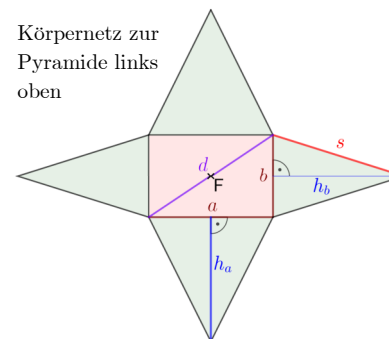
- $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- $O_{\text{Kegel}} = G + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot m$

m , r und h bilden im Kegel ein rechtwinkliges Dreieck, daher gilt beispielsweise:

- $m^2 = r^2 + h^2$
- $\sin(\alpha) = \frac{h}{m} \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{m} \quad \tan(\alpha) = \frac{h}{r}$



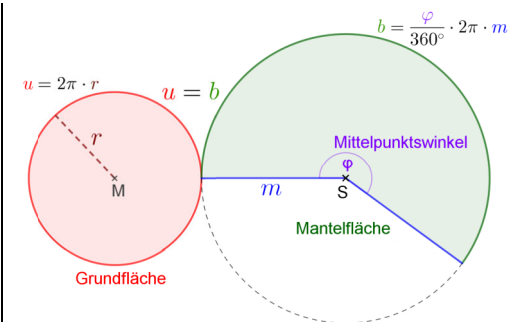
Das Körpernetz von Pyramide und Kegel



Bei der abgebildeten Pyramide gilt:

$$O = a \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$= a \cdot b + a \cdot h_a + b \cdot h_b$$

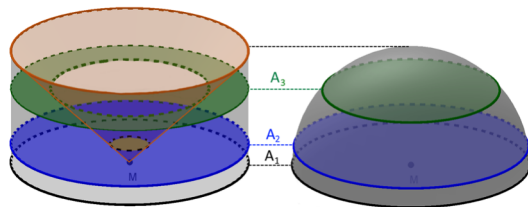
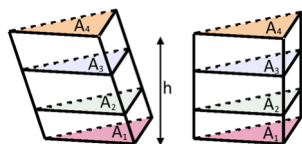


Die ausgerollte Mantelfläche des Kegels ist ein Kreissektor, dessen **Bogenlänge b** dem **Umfang u** der **Grundfläche** entspricht. Es folgt:

$$\frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot m = 2\pi \cdot r \Leftrightarrow \frac{\varphi}{360^\circ} = \frac{r}{m}$$

Das Prinzip von Cavalieri

Wenn zwei Körper die gleiche Höhe besitzen und ihre Querschnittsflächen in jeder beliebigen Höhe einen identischen Flächeninhalt aufweisen, dann besitzen diese Körper das gleiche Volumen



Beispiel: Die Querschnittsflächen (beispielhaft grün und blau) in dem Differenzkörper aus Zylinder und Kegel sind Kreisringe, die Querschnittsflächen der Halbkugel sind Kreise. Die Flächeninhalte dieser Querschnittsflächen sind auf jeder Höhe der beiden Körper identisch, das Volumen der Körper ist gleich.

Die Kugel

Eine Kugel enthält alle Punkte, deren Abstand zum Kugelmittelpunkt kleiner oder gleich r (Kugelradius) ist.

Für das **Volumen** einer Kugel mit Radius r gilt:

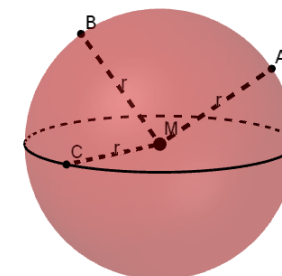
$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

(Eine Herleitung ist mit dem

Prinzip von Cavalieri wie im Beispiel in der linken Karte möglich.)

Für die **Oberfläche** einer Kugel mit Radius r gilt:

$$O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

**Methode: Biquadratische Gleichungen lösen mit Hilfe der Substitution**

Eine biquadratische Gleichung der Form $a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0$ kann man mittels **Substitution** („Ersetzung“) lösen. Dabei ersetzt man x^2 durch eine neue Variable u und löst die so entstandene Gleichung dann für u . Anschließend macht man die Substitution rückgängig (Resubstitution), um x zu bestimmen.

Beispiel: Die Lösungen der Gleichung $-x^4 + 9x^2 - 8 = 0$ sollen bestimmt werden.

- 1) Substitution: $u = x^2 \Rightarrow -u^2 + 9u - 8 = 0$
- 2) Lösungen für u : $u_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} \Leftrightarrow u_1 = 1 \quad u_2 = 8$
- 3) Resubstitution: $1 = x^2$ und $8 = x^2$
 $x = \pm 1$ und $x = \pm \sqrt{8}$

Die vier Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind somit:

$$x_1 = -2\sqrt{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2\sqrt{2}$$