Quadratwurzeln

Definition: $\sqrt{r}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert r ergibt.

- Den Term r unter der Wurzel nennt man **Radikand**. Das Ausrechnen der Wurzel nennt man **Radizieren**.
- Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl r, weil das Quadrat einer beliebigen Zahl niemals negativ sein kann.
- Für $r \geq 0$ gilt: $\left(\sqrt{r}\right)^2 = r$.

Beispielfragen:

- Sowohl 12 als auch -12 ergeben quadriert 144. Steht die Schreibweise $\sqrt{144}$ also für zwei Zahlen? Nein. Nur 12 ist eine nicht negative Zahl. $\Rightarrow \sqrt{144} = 12$
- Welche Zahlen ergeben quadriert 0,25? $\sqrt{0,25} = 0,5$ und $-\sqrt{0,25} = -0,5$
- Welche Lösung hat $\sqrt{0,0025}$? $\sqrt{0,0025} = 0,05$ $\left(-0,05 \text{ nicht, da } -0,05 < 0\right)$

Definitionsmenge von Quadratwurzeltermen

Die **Definitionsmenge D** eines Quadratwurzelterms besteht aus allen Zahlen, für die der Radikand beim Einsetzen nicht negativ wird.

Beispiele: i) $\sqrt{x-5}$ NR: $x - 5 \geq 0 \;|+5$ $\Rightarrow x \geq 5$ $\Rightarrow D = [5;\infty[$

ii) $\sqrt{-2x+3}$ NR: $-2x + 3 \geq 0 \;|-3 \Rightarrow -2x \geq -3 \;|:(-2) \Rightarrow x \leq 1,5 \Rightarrow D =]-\infty;1,5]$

Rechenregeln für Quadratwurzeln

Produkte von Quadratwurzeln: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $(a,b \geq 0)$

Quotienten von Quadratwurzeln: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$

Summen und Differenzen nur bei gleichartigen Termteilen zusammenfassen:

$$4\sqrt{a} + 5\sqrt{b} + 2\sqrt{a} = 6\sqrt{a} + 5\sqrt{b}$$

Teilweises Radizieren: $\sqrt{128} - \sqrt{8} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Nenner rational machen: $\frac{27}{\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3}}{=} \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}$

Zahlenmengen

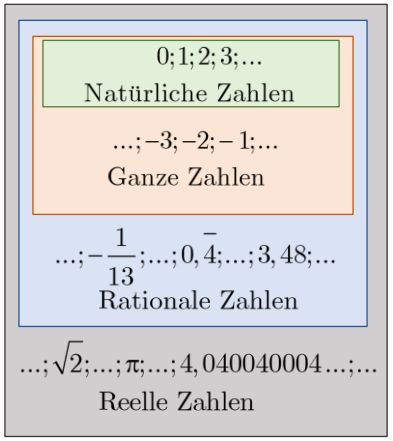
Unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen sind keine rationalen Zahlen. Sie heißen **irrationale Zahlen**. Mit einem indirekten Beweis kann man z.B. zeigen, dass $\sqrt{2} = 1,414213...$ eine irrationale Zahl ist.

Natürliche Zahlen:
$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$ (nach neuer Definition mit 0)

Ganze Zahlen:
$\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;...\}$

Rationale Zahlen:
$\mathbb{Q}$ = Menge aller endlichen und unendlich-periodischen Dezimalzahlen

Reelle Zahlen:
$\mathbb{R}$ = Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen



Allgemeine Wurzeln

Definition: Die **n-te Wurzel** von a $(a \geq 0)$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$. Man schreibt $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$.

Bsp.: $\sqrt[3]{8} = 2$, da $2^3 = 8$. $\sqrt[3]{-8}$ gibt es nicht, da $-8 < 0$. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

Potenzen mit rationalen Exponenten $(a > 0; m,n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$

Man legt fest: $a^{\frac{m}{n}}$ ist die m-te Potenz der n-ten Wurzel aus a: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

$a^{-\frac{m}{n}}$ ist der Kehrbruch von $a^{\frac{m}{n}}$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Bsp.: $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Die Potenzgesetze (siehe GW 8 S. 4) gelten auch für diese Potenzen.

Quadratische Gleichungen lösen - Mitternachtsformel

Die Lösungen jeder **quadratischen Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ kann man mit Hilfe der **Mitternachtsformel** $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ermitteln.

Dabei heißt der Term $b^2 - 4ac$ **Diskriminante** D.

Falls D $\begin{Bmatrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ ist, hat die quadratische Gleichung $\begin{Bmatrix} \text{zwei Lösungen} \\ \text{eine Lösung} \\ \text{keine Lösung} \end{Bmatrix}$.

Bsp.: Ermittle die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 12x = 6,5$.

1.: **Bringe in die "Normalform"**: $2x^2 + 12x - 6,5 = 0$

2.: Identifiziere $a = 2$; $b = 12$ und $c = -6,5$ und setze in die Mitternachtsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6,5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-12 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{-12 \pm 14}{4}; \Rightarrow x_1 = 0,5;\ x_2 = -6,5;$$

Quadratische Gleichungen lösen – alternative Methoden

- Reinquadratische Gleichungen (ohne bx-Term):

  Bsp.: $3 \cdot x^2 = 6$ umformen in $x^2 = 2$.

  $\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$

- Quadratische Gleichungen in faktorisierter Form (**wichtig**: die eine Seite muss ein Produkt mit Linearfaktoren und die andere Seite **0** sein):

  Bsp.: $3 \cdot (x-4) \cdot (x+7) = 0 \xRightarrow{\text{Lösungen direkt ablesbar}} x_1 = 4$ und $x_2 = -7$

- Quadratische Gleichungen in „Scheitelpunktform“:

  Bsp.: $(x-3)^2 - 2 = 0 \quad |+2$

  $(x-3)^2 = 2$

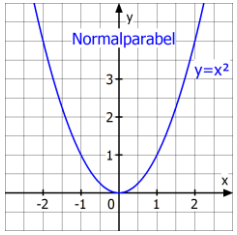
  1. Lösung: $x_1 - 3 = +\sqrt{2} \quad |+3 \quad \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 3$

  2. Lösung: $x_2 - 3 = -\sqrt{2} \quad |+3 \quad \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} + 3$

Quadratische Funktionen

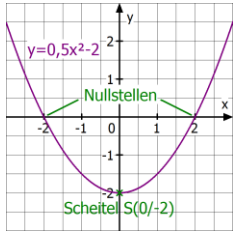
Funktionen der Form $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) heißen **quadratische Funktionen**. Ihre Graphen nennt man **Parabeln**. Der Graph von $x \mapsto x^2$ heißt **Normalparabel**. Der tiefste bzw. höchste Punkt heißt **Scheitelpunkt** der Parabel. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse nennt man **Nullstellen** der Parabel.

$x \mapsto x^2$



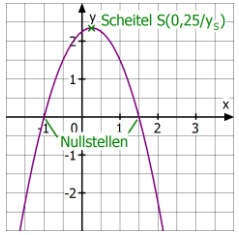
Normalparabel NP

$x \mapsto 0,5x^2 - 2$



Breiter als NP, da 0<a<1 (a ist hier 0,5)

$x \mapsto -1,5x^2 + 0,75x + 2,25$



Nach unten geöffnet, da a<0 (a ist hier -1,5)

Darstellungsformen quadratischer Funktionen

Scheitelpunktform	Normalform	Nullstellenform
$x \mapsto a(x - x_S)^2 + y_S$	$x \mapsto ax^2 + bx + c$	$x \mapsto a(x - x_{N1})(x - x_{N2})$
Scheitelpunkt $S(x_S \mid y_S)$	y-Achsenschnittpkt. $S_y(0 \mid c)$	x_{N1}, x_{N2} sind die Nullstellen

Darstellungsformen ineinander umwandeln:

Scheitelform $\underset{\text{quadratische Ergänzung}}{\overset{\text{Scheitelpunktterm ausmultiplizieren}}{\rightleftarrows}}$ Normalform $\underset{\text{Nullstellenform ausmultiplizieren}}{\overset{\text{Nullstellen mit Hilfe der Gleichung } f(x)=0 \text{ ermitteln.}}{\rightleftarrows}}$ Nullstellenform

Bsp.: $f(x) = \overset{\text{Faktor a}}{-1,5}\ x^2 + 0,75x + 2,25; \xRightarrow{\text{in Nullstellenform}} f(x) = \overset{\text{Faktor } a}{-1,5} \cdot (x - (-1))(x - 1,5)$

Nullstellengleichung: $-1,5x^2 + 0,75x + 2,25 = 0;$

$$x_{N1,N2} = \frac{-0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 4 \cdot (-1,5) \cdot 2,25}}{2 \cdot (-1,5)} \Rightarrow x_{N1} = -1;\ x_{N2} = 1,5$$

Extremwertprobleme

Allgemeine Lösungsschritte

1. Stelle für die zu optimierende Größe einen passenden Term auf.
2. Ersetze mit Hilfe einer Zusatzinformation eine der Variablen im obigen Term.
3. Bestimme die Koordinaten des Punktes mit dem max. (min.) Funktionswert der in Schritt 2 entstehenden Funktion (bei quadratischen Funktionen Scheitelpunkt nutzen).
5. Prüfe das Ergebnis an der D-Menge und übertrage es auf den Sachzusammenhang.

Aufgabenbeispiel:

Rechteck mit Umfang 40 cm.

Ziel: Flächeninhalt maximieren

x sei die Länge und y die Breite.

$A(x,y) = x \cdot y$

$\underset{40\text{ cm Umfang}}{\Rightarrow} \quad 2x + 2y = 40 \quad \left| -2x \right| : 2$

$\Rightarrow \quad y = 20 - x$

$A(x) = x \cdot (20 - x)$

$= -x^2 + 20x =$

quadr. Ergänzung

$= -(x-10)^2 + 100$

$\Rightarrow S(10|100)$

$x_S = 10$ liegt in $D =]0;20[$.

$\Rightarrow x = y = 10\,cm$; also Quadrat

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit drei Unbekannten

Allgemeine Lösungsschritte

1. Löse eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf und setze in die beiden anderen Gleichungen ein. So entsteht ein LGS mit zwei Unbekannten.
2. Löse dieses System mit den bekannten Methoden (siehe GW 8. Klasse).
3. Bestimme mit den Ergebnissen aus Schritt 2 die 3. Unbekannte.

Parabel $y = ax^2 + bx + c$ mit den Punkten $P(1|2); Q(3|0)$ und $R(4|2)$.

$(I) \quad a + b + c = 2 \quad (\text{zu P})$

$(II) \quad a \cdot 9 + b \cdot 3 + c = 0 \quad (\text{zu Q})$

$(III) \quad a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 2 \quad (\text{zu R})$

$(I') \quad c = 2 - a - b \rightarrow \text{in } (II) \text{ und } (III)$

$(II') \quad 9a + 3b + 2 - a - b = 0 \,|-2$

$8a + 2b = -2;$

$(III') \quad 16a + 4b + 2 - a - b = 2 \,|-2$

$15a + 3b = 0$

II' und III' lösen wie in 8. Klasse:

$\Rightarrow a = 1$ und $b = -5$

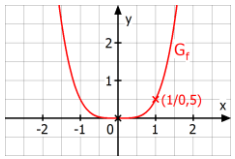
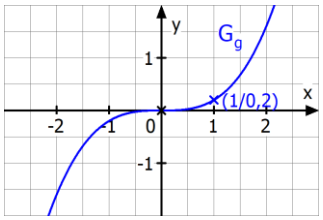
Einsetzen von $a = 1$ und $b = -5$ in (I'):

$c = 2 - 1 - (-5) \Rightarrow c = 6$

$\Rightarrow L = \{(1;-5;6)\}$ bzw. $y = x^2 - 5x + 6$

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n \; (n \in \mathbb{N},\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißen **Potenzfunktionen**.

n gerade	n ungerade
G ist achsensymmetrisch zur y-Achse	G ist punktsymmetrisch zum Ursprung
Bsp.: $f: x \mapsto 0{,}5 \cdot x^4$  $W = \mathbb{R}_0^+$ G_f ist für $x \begin{Bmatrix} \le 0 \\ \ge 0 \end{Bmatrix}$ monoton $\begin{Bmatrix} \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{Bmatrix}$.	Bsp.: $g: x \mapsto 0{,}2 \cdot x^3$  $W = \mathbb{R}$ G_g ist überall monoton steigend.
Die Graphen verlaufen immer durch (0/0) und (1/a). Ein negatives a bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse.	

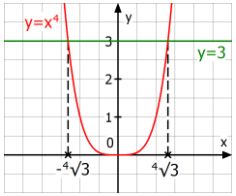
Potenzgleichungen

Beim Lösen von Potenzgleichungen $x^n = c \; (c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ unterscheidet man vier Fälle:

n gerade		n ungerade	
$c > 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c < 0$
zwei Lösungen $x_1 = \sqrt[n]{c};\; x_2 = -\sqrt[n]{c}$	keine Lösung	eine Lösung $x = \sqrt[n]{c}$	eine Lösung $x = -\sqrt[n]{\lvert c \rvert}$

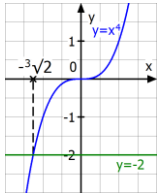
Eine graphische Veranschaulichung hilft beim Lösen, siehe die beiden Beispiele:

Gleichung: $x^4 = 3$



$\Rightarrow L = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$

Gleichung: $x^3 = -2$



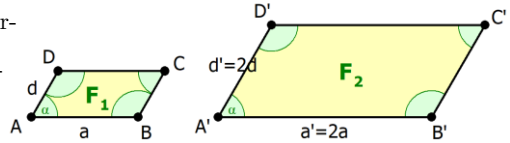
$\Rightarrow L = \{-\sqrt[3]{2}\}$

Ähnlichkeit

Zwei Figuren F_1 und F_2 sind zueinander **ähnlich** $\left(F_1 \sim F_2\right)$, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern ineinander überführen kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn die **beiden** folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es gibt eine positive Zahl k, so dass jede Strecke von F_2 k-mal so lang ist wie die entsprechende Strecke von F_1. k heißt **Ähnlichkeitsfaktor**.
- Die entsprechenden Winkel sind jeweils gleich groß.

Bsp.: Aus $a' = 2a$ und $d' = 2d$, der Übereinstimmung in α und den Eigenschaften von Parallelogrammen folgt: $F_2 \sim F_1$, mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 2$ (Vergrößerung, da $k > 1$).

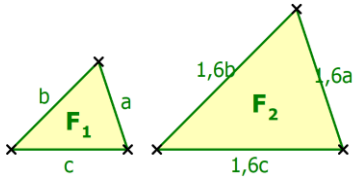


Dreiecke sind schon ähnlich, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

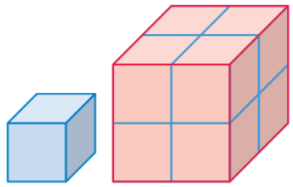
Flächeninhalte und Volumina bei ähnlichen Figuren

- Eine ähnliche Figur mit k-fachen Seitenlängen hat den k^2-fachen Flächeninhalt.
- Ein ähnlicher Körper mit k-fachen Kantenlängen hat das k^3-fache Volumen.

1. Bsp.: Die beiden Dreiecke F_1 und F_2 sind ähnlich und es gilt $k = 1{,}6$.
Für den Flächeninhalt vom zweiten Dreieck gilt daher: $A_2 = 1{,}6^2 \cdot A_1 = 2{,}56 \cdot A_1$

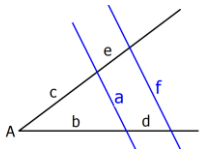


2. Bsp.: Die beiden Würfel sind ähnlich und es gilt $k = 2$.
Für das Volumen gilt daher: $V_{rot} = 2^3 \cdot V_{blau} = 8 \cdot V_{blau}$
Für den Oberflächeninhalt gilt: $O_{rot} = 2^2 \cdot O_{blau} = 4 \cdot O_{blau}$



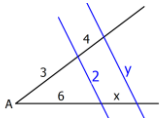
Strahlensätze an der V-Figur

Wenn $a \parallel f$ ist, gilt:



- Je zwei Abschnitte eines Strahls verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl. Bsp.: $\frac{b}{b+d} = \frac{c}{c+e}$
- Die Parallelenabschnitte verhalten sich wie die entsprechenden Geradenabschnitte, <u>die in A beginnen</u>. Bsp.: $\frac{b}{b+d} = \frac{a}{f}$

Beispiel:



$\frac{x}{6} = \frac{4}{3}; \quad |\cdot 6$ (1. Strahlensatz in der V-Figur)

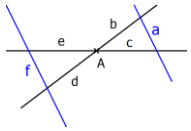
$\Rightarrow x = 8;$

$\frac{y}{2} = \frac{4+3}{3}; \quad |\cdot 2$ (2. Strahlensatz in der V-Figur)

$\Rightarrow y = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3};$

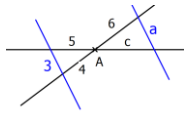
Strahlensätze an der X-Figur

Wenn $a \parallel f$ ist, gilt:



- Je zwei Abschnitte auf einer der sich schneidenden Geraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden. Bsp.: $\frac{d}{b} = \frac{e}{c}$
- Die Parallelenabschnitte verhalten sich wie die entsprechenden Geradenabschnitte, die in A beginnen. Bsp.: $\frac{d}{f} = \frac{b}{a}$

Beispiel:



$\frac{c}{5} = \frac{6}{4}; \quad |\cdot 5$ (1. Strahlensatz in der X-Figur)

$\Rightarrow c = 7{,}5;$

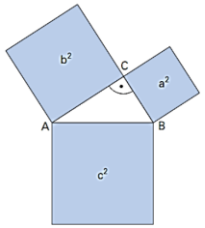
$\frac{a}{3} = \frac{6}{4}; \quad |\cdot 3$ (2. Strahlensatz in der X-Figur)

$\Rightarrow a = \frac{18}{4} = 4{,}5;$

Satz des Pythagoras

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, **dann** haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. In einem Dreieck mit Hypotenuse c gilt also:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



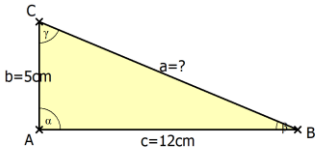
Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck ausrechen.

Bsp.: Dreieck ABC mit $\alpha = 90°$; $b = 5\,cm; c = 12\,cm$

ges.: Länge der Hypotenuse a

Lsg.: $a^2 = b^2 + c^2$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{(5\,cm)^2 + (12\,cm)^2} = 13\,cm$$



Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Der Kehrsatz (siehe GW 7. Klasse) zum Satz des Pythagoras liefert ebenfalls eine richtige Aussage:

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen ist, **dann** ist das Dreieck rechtwinklig.

Mit dem Kehrsatz des Pythagoras kann man testen, ob ein Dreieck einen 90°-Winkel besitzt.

Bsp.: Dreieck ABC mit $a = 90\,cm$, $b = 106\,cm$ und $c = 56\,cm$.

Da $90^2 + 56^2 = 11236 = 106^2$ gilt, ist die Gleichung $a^2 + c^2 = b^2$ erfüllt.

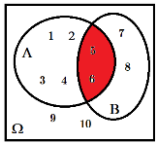
$\overset{\text{Kehrsatz d. P.}}{\Rightarrow}$ Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei B.

Stochastik Teil 1 – Verknüpfte Ereignisse

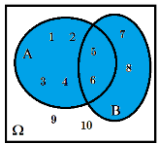
Verknüpfungen zweier Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments können mithilfe von Mengendiagrammen dargestellt werden.

Bsp.: Aus den Zahlen 1 bis 10 wird zufällig eine Zahl ausgewählt und die beiden Ereignisse A: "Zahl ist kleiner als 7." und B: "Zahl größer als 4 und kleiner als 9." betrachtet.

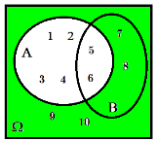
$A \cap B =$
$= \{5;6\}$



$A \cup B =$
$= \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

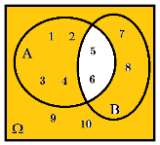


$\overline{A} =$
$= \{7;8;9;10\}$

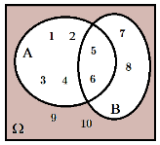


Gesetze von de Morgan:

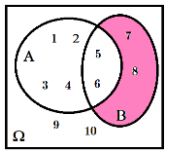
$\overline{A \cap B} =$
$= \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A \cup B} =$
$= \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A} \cap B =$
$= \{7;8\}$



Stochastik Teil 2 – Vierfeldertafel

Vierfeldertafeln ermöglichen einen Überblick über die Mächtigkeiten bzw. die Wahrscheinlichkeiten von zwei Ereignissen A und B und ihrer Gegenereignisse (Summenwerte der Zeilen- bzw. Spalten) sowie ihrer Schnittereignisse (Einträge im Inneren der Tabelle).

Vierfeldertafel mit Mächtigkeiten mit dem Beispiel vom linken Kärtchen:

	A	$\overline{A}$	
B	$\lvert A \cap B \rvert = 2$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert = 2$	$\lvert B \rvert = 4$
$\overline{B}$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert = 4$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert = 2$	$\lvert \overline{B} \rvert = 6$
	$\lvert A \rvert = 6$	$\lvert \overline{A} \rvert = 4$	$\lvert \Omega \rvert = 10$

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten mit dem Beispiel vom linken Kärtchen:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B) = \frac{2}{10}$	$P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{10}$	$P(B) = \frac{4}{10}$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = \frac{4}{10}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{10}$	$P(\overline{B}) = \frac{6}{10}$
	$P(A) = \frac{6}{10}$	$P(\overline{A}) = \frac{4}{10}$	$P(\Omega) = 1$

Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungsmengen müssen berechnet werden:

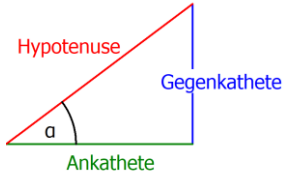
Formel: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

im Bsp.: $P(A) = 0{,}6; P(B) = 0{,}4; P(A \cap B) = 0{,}2 \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}8$

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck wie z.B. rechts gilt:

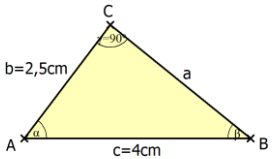
$\sin(\alpha) =$	$\cos(\alpha) =$	$\tan(\alpha) =$	$\cot\alpha =$
Gegenkathete	Ankathete	Gegenkathete	Ankathete
$H^{\text{ühner}}_{\text{ypotenuse}}$	$H^{\text{of}}_{\text{ypotenuse}}$	Ankathete	Gegenkathete



Eselsbrücke: „GA GA HühnerHof AG“ (Der Kotangens wurde nicht unterrichtet!)

Mit sin, cos und tan kann man Seitenlängen und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken berechnen.

geg.: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $c = 4\,cm$ und $b = 2{,}5\,cm$ *ges.:* β und a



- $\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2{,}5\,cm}{4\,cm} = 0{,}625 \quad \Rightarrow \beta = \sin^{-1} 0{,}625 \approx 38{,}7°$
- $\cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \cos(\beta) \cdot c \approx \cos(38{,}7°) \cdot 4\,cm \approx 3{,}1\,cm$

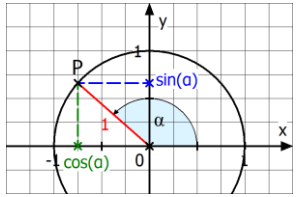
Trigonometrie Teil 2

Zusammenhänge: $\underbrace{\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)}_{\text{"Komplementformel"}}$ $\underbrace{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}_{\text{"Trigonometrischer Pythagoras"}}$ $\underbrace{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\text{"Weitere Formel für den Tangens"}}$

Sinus und Kosinus im Einheitskreis:

Ist $P(x|y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis und α der zugehörige Winkel $(0 \le \alpha \le 360°)$, so legt man fest:

$\boxed{\cos\alpha = x \qquad \sin\alpha = y}$

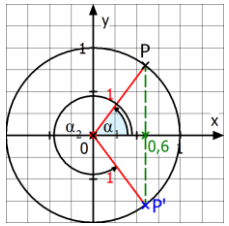


Bsp.: Ermittle alle Winkel $0 \le \alpha \le 360°$ für die gilt $\cos\alpha = 0{,}6$.

1. Schritt: Nutze den Taschenrechner: $\alpha_1 = \cos^{-1} 0{,}6 \approx 53{,}1°$

2. Schritt: Suche im Einheitskreis die Lage des weiteren Punktes mit der x-Koordinate 0,6.

$\Rightarrow \alpha_2 \approx 360° - 53{,}1° = 306{,}9°$



Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Bsp.: $b = 8\,cm$; $c = 5\,cm$ und $\gamma = 35°$

ges.: β

Lsg.: $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$\Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c} \cdot \sin\gamma = \sin 35° \cdot \frac{8}{5} \approx 0{,}9177$

$\Rightarrow \beta \approx 66{,}6°$

Kosinussatz

In einem beliebigen Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Bsp.: $a = 4\,cm$; $b = 5\,cm$; $c = 2\,cm$

ges.: α

Lsg.: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$= \frac{25\,cm^2 + 4\,cm^2 - 16\,cm^2}{2 \cdot 5\,cm \cdot 2\,cm} = 0{,}65$

$\Rightarrow \alpha \approx 49{,}5°$

- Diesen Grundwissenskatalog solltest du in deinen Grundwissensordner abheften.
- Der Grundwissenskatalog bietet dir eine Übersicht über die wichtigsten Themen des letzten Schuljahres.

Für die Grundwissensaufgabe in der Schulaufgabe solltest du zu den einzelnen Themen bei Bedarf noch Übungsaufgaben machen. Hierzu empfehlen wir dir die für HGF-Schüler kostenlose Lernplattform www.mathegym.de.