Terme – allgemein

Variablen sind Buchstaben, die Zahlen vertreten.
Terme sind Rechenausdrücke, die aus Zahlen, Rechenzeichen, Klammern, Potenzen und Variablen bestehen können.

Einsetzen in Terme: Setzt man für die Variablen konkrete Zahlen ein, so bezeichnet man das Ergebnis der entstandenen Rechnung als **Termwert**.

$T_1(x) = x^3 - 4x$ $\quad$ $T_1(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$
$T_2(a;b) = a^2 + b^2$ $\quad$ $T_2(3;-4) = 3^2 + (-4)^2 = 25$

Wertetabellen ermöglichen eine übersichtliche Darstellung mehrerer Termwerte.

x	-4	-3	5
$T(x) = (x+3)(x-3)$	7	0	16

Tabellenkalkulations-programme ermöglichen eine schnelle Berechnung vieler Termwerte.

	A	B	C	D
1				
2	x	-4	-3	5
3	(x+3)(x-3)	=(B2+3)*(B2-3)	0	16

Terme – Äquivalenz

Zwei Terme heißen **äquivalent über einer Menge**, wenn sich beim Einsetzen **aller** Werte aus einer vorgegebenen Menge jeweils die gleichen Termwerte ergeben.

x	0	2	4
$T_1(x) = x + x$	0	4	8
$T_2(x) = x^2$	0	4	16

T_1 und T_2 sind äquivalent über der Menge $\{0;2\}$ aber nicht über der Menge $\{0;2;4\}$, da $T_1(4) = 8 \neq T_2(4) = 16$

Nachweis, dass zwei Terme **äquivalent** über einer Menge sind:
Möglichkeit 1: **Alle Werte** der Menge sind einzusetzen und die Termwerte müssen jeweils übereinstimmen.
Möglichkeit 2: Sind Terme nach *Termumformungen* (vgl. GW-Karten 4-7) identisch, sind sie ebenfalls äquivalent.

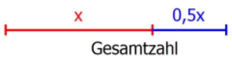
Nachweis, dass zwei Terme **nicht äquivalent** über einer Menge sind:
Ein Wert aus der Menge, bei dem die Termwerte unterschiedlich sind, genügt.

Aufstellen und Interpretieren von Termen

Ein Term – Zwei Interpretationen: $T(x) = (7 \cdot x) \cdot 0{,}5$

Bedeutung von x:		Mögliche Interpretation:
Grundlinie eines Dreiecks	→	Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundlinie x und Höhe 7 cm
Größe einer Gruppe von Badegästen	→	Eintrittspreis für die gesamte Gruppe, wenn ein reguläres Einzelticket 7 € kostet und der Gruppenrabatt 50 % beträgt

Terme aufstellen (Vor dem Aufstellen: Variable festlegen!)

Aufgabe	Festlegung und Überlegung	Lösung
Es sind doppelt so viele Mädchen wie Jungen. Term für Gesamtzahl?	**F.**: x ist die Anzahl der Mädchen. **Überlegung:** 	$T(x) = x + 0{,}5x$
Term für die Innenwinkelsumme eines n-Ecks?	**F.**: n ist die Anzahl der Ecken. **Drei**eck: $180° = (\mathbf{3} - 2) \cdot 180°$ **Vier**eck: $360° = (\mathbf{4} - 2) \cdot 180°$ **Fünf**eck: $540° = (\mathbf{5} - 2) \cdot 180°$	$T(n) = (n-2) \cdot 180°$

Termumformungen – Produkte

$4 \cdot xy \cdot x \cdot y \cdot 3z \cdot z \cdot z =$
$= 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z =$ $\quad$ mithilfe der Rechengesetze die Faktoren ordnen
$= 12x^2y^2z^3$ $\quad$ gleiche Faktoren als Potenz schreiben

Termumformungen – Potenzen

	Gesetz	Beispiel
• Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren	$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$z^3 \cdot z^4 = z^{3+4} = z^7$
• Ein Produkt potenzieren	$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$(ab)^3 = a^3b^3$
• Eine Potenz potenzieren	$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$	$(t^3)^4 = t^{3 \cdot 4} = t^{12}$

Termumformungen – Strichrechnungen

Gleichartige Terme sind Terme, die sich höchstens im Zahlfaktor (Koeffizient) unterscheiden, z.B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2y^3}$ und $4\boldsymbol{x^2y^3}$.

Addiere bzw. subtrahiere gleichartige Terme, indem du die Koeffizienten addierst bzw. subtrahierst und die gemeinsamen Variablen beibehältst.
Beispiel 1: $4x - x = 3x$ (Erinnerung: $-x = -1 \cdot x$)
Beispiel 2: $3x + x^2 + 2x - y = 5x + x^2 - y$
Beispiel 3: $3x + 3x^2$ (Kein Zusammenfassen möglich, da Terme nicht gleichartig!)

Termumformungen – Plus- und Minusklammern

$a + (b + c) = a + b + c$ $a + (-b - c) = a - b - c$	Plusklammern kann man weglassen. Die Zeichen in der Klammer bleiben gleich.
$a - (b + c) = a - b - c$ $a - (-b - c) = a + b + c$	Minusklammern kann man weglassen. Die Zeichen in der Klammer müssen dann aber umgekehrt werden.

Termumformungen – Ausmultiplizieren und Ausklammern

Anwendung des Distributivgesetzes bei Variablen

$$6ay + 3az = 3a \cdot 2y + 3a \cdot z \overset{ausklammern}{=} 3a \cdot (2y + z)$$

$$3a \cdot (2y + z) \overset{ausmultiplizieren}{=} 3a \cdot 2y + 3a \cdot z = 6ay + 3az$$

Die Umformung einer Summe in ein Produkt (z.B. durch das Ausklammern) wird **Faktorisieren** genannt.

Multiplikation von Summen

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd$$

Termumformungen – Binomische Formeln

Für beliebige Terme a und b gilt:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ „Plusformel“
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ „Minusformel“
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ „Plusminusformel“

<u>Aufgabe</u>: Ergänze die Lücken!

$(5a - \square)(5a + \square) = \square - 9b^2$

$\left(\square - \frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \square + \frac{9}{4}y^2$

<u>Lösung</u>

$(5a - 3b)(5a + 3b) = 25a^2 - 9b^2$

$\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - 2xy + \frac{9}{4}y^2$

denn $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^2$

denn $2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{2}y = 2xy$

Gleichungen – allgemein

Eine <u>**Gleichung**</u> besteht aus 2 Termen, die mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind.

Beispiel: $x + 8 = 3 \cdot x$

Eine Gleichung kann auch als Zahlenrätsel formuliert werden.

Zu welcher Zahl (x) kann ich acht dazuzählen, um das Dreifache dieser Zahl zu erhalten?

Die Zahlen, mit denen man probieren darf, ob sie die Gleichung lösen, stammen aus der <u>**Grundmenge G**</u>.

Normalerweise werden in der Grundmenge alle bekannten Zahlen zugelassen, also: $G = \mathbb{Q}$

Die Zahlen, die beim Einsetzen in die Variable eine wahre Aussage ergeben (*Ergebnis der linken Seite ist gleich dem Ergebnis der rechten Seite*), sind die <u>**Lösungen der Gleichung**</u> und werden in der <u>**Lösungsmenge L**</u> zusammengefasst.

Durch systematisches Probieren:

x	Linke Seite	Rechte Seite	
2	$2 + 8 = 10$	$3 \cdot 2 = 6$	↯
3	$3 + 8 = 11$	$3 \cdot 3 = 9$	↯
4	$4 + 8 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$	✓

Die Lösung der Gleichung (des Zahlenrätsels) ist 4 und damit $L = \{4\}$

Lineare Gleichungen – mit Kalkül zur Lösung

Lösungsphasen		*Äquivalenzumformung*
Aufräumen: Beide Seiten getrennt vereinfachen	$2x+5(x+1)=4(x-2)+1$ $2x+5x+5=4x-8+1$	Ausmultiplizieren und gleichartige Terme zusammenfassen
Trennen: x-Terme auf eine Seite bringen	$7x+5=4x-7 \quad \vert -4x$	Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms
Trennen: Zahlen auf die andere Seite bringen	$3x+5=-7 \quad \vert -5$	Addieren oder Subtrahieren der gleichen Zahl
x isolieren	$3x=-12 \quad \vert :3$	Multiplizieren oder Dividieren mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl
Lösung	$x=-4$	

Probe: Einsetzen der Lösung in die 1. Zeile

Gleichungen – Spezialfälle

Beim Umformen von **Gleichungen** können **zwei Spezialfälle** auftreten:

Unlösbare Gleichung:

$3(x+2)+4=6(0{,}5x+2)$

$3x+6+4=3x+12$

$10=12$ ↯

Dies ist für kein x erfüllbar, also: $L=\{\ \}$

Allgemeingültige Gleichung:

$3(x+2)+6=6(0{,}5x+2)$

$3x+6+6=3x+12$

$12=12$

Dies ist für alle x erfüllt, also: $L=\mathbb{Q}$

Bei **Brüchen** ist es geschickt, beide Seiten mit dem Hauptnenner zu multiplizieren:

$\frac{1}{2}(x-3)+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}(x+1)-\frac{4}{3} \quad \vert \cdot 6$

$3(x-3)+4=5(x+1)-8$

$3x-9+4=5x+5-8$

$-5+3=2x$

$-1=x$

$L=\{-1\}$

Sonderfall: Ist die Gleichung von der Form **„Term = 0"** musst du beachten, dass ein Produkt Null ist, wenn **einer der Faktoren** Null ist.

Bsp.: $x^2-5x=0$ Wir verwandeln zunächst die linke Seite in ein Produkt

$x\cdot(x-5)=0$ und diese Seite ist Null, wenn $x=0$ oder $x=5$ ist, also $L=\{0;\ 5\}$.

Vertiefung der Prozentrechnung

Grundgleichung der Prozentrechnung: $\boxed{\text{PS}\cdot\text{GW}=\text{PW}}$ (siehe GW 6. Klasse)

Prozentuale Zunahme- bzw. Abnahmeaufgaben

TIPP! Man erhält den **Prozentsatz** für die Grundgleichung, indem man den gegebenen Prozentsatz zu 100 % addiert bzw. von 100 % subtrahiert.

Bsp.: Der Preis ist **um 15 %** auf 340 € **gesenkt** worden. Berechne den alten Preis.

Grundwert = x; Prozentsatz = **100 % - 15 %** = 85 % Prozentwert = 340 €

Grundgleichung: $0{,}85\cdot x=340\,€;\ \vert :0{,}85 \Rightarrow \quad x=400\,€;$

Mehrere Zu- und Abnahmen können zu einem Faktor zusammengefasst werden.

Bsp.: Der Preis von 40 € wird zuerst um 20 % erhöht. Der neue Preis wird danach wieder um 15 % gesenkt. Bestimme den **Prozentsatz** für die Grundgleichung.

$PS_1=100\,\%+20\,\%=120\,\%=1{,}20;\qquad PS_2=100\,\%-15\,\%=85\,\%=0{,}85;$

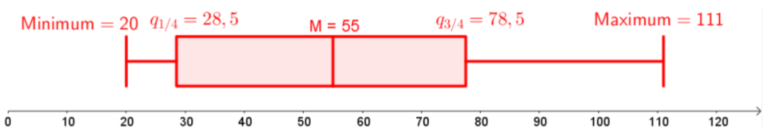
Prozentsatz $=1{,}20\cdot0{,}85=1{,}02=102\,\% \Rightarrow$ Der Endpreis ist insgesamt 2% höher.

Darstellen von Daten – Boxplot

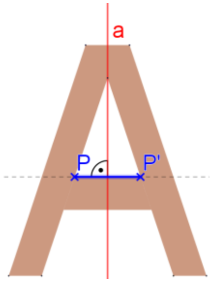
Beispieldatensatz (sortiert): 20; 21; 27; 30; 49; 50; 55; 67; 73; 74; 81; 81; 111

- **Arithmetisches Mittel $\overline{m}$**: siehe GW 6. Klasse S. 4. [im Bsp.: $\overline{m}=ca.\,56{,}8$]
- **Spannweite R**: Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert. [R = 91]
- **Median M**: Wert, der in der Mitte des sortierten Datensatzes steht. Bei einer geraden Zahl von Daten muss man den Mittelwert aus den beiden in der Mitte stehenden Daten bilden. [im Bsp.: M = 55]
- **Unteres Quartil $q_{1/4}$** und **oberes Quartil $q_{3/4}$**: Mediane der unteren und oberen Hälfte des sortierten Datensatzes. [im Bsp.: $q_{1/4}=28{,}5$ und $q_{3/4}=77{,}5$]

Boxplot: Darstellung der obigen Kenngrößen in einem Zahlenstrahl-Diagramm

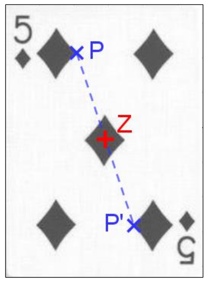


Achsensymmetrische Figuren



Zu jedem Punkt P gibt es in einer achsensymmetrischen Figur auch einen zur Symmetrieachse a symmetrisch liegenden Punkt P'. Die Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert. P und P' haben somit von der Symmetrieachse den gleichen Abstand.

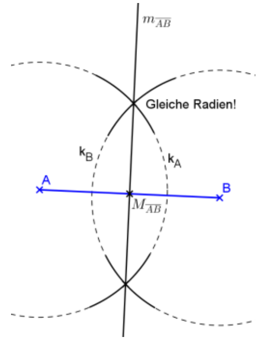
Punktsymmetrische Figuren



Zu jedem Punkt P gibt es in einer punktsymmetrischen Figur auch einen zum Symmetriezentrum Z symmetrisch liegenden Punkt P'. Die Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ wird vom Zentrum halbiert. P und P' haben somit vom Symmetriezentrum den gleichen Abstand.

Grundkonstruktionen 1

Konstruktion der Mittelsenkrechten m einer Strecke $\overline{AB}$



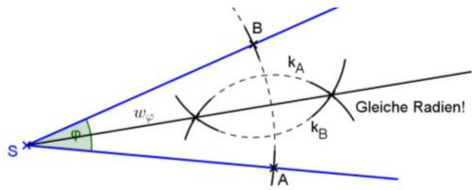
Idee: Man konstruiert die Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

Zusatz: Die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ besteht aus genau den Punkten, die von den Punkten A und B gleich weit entfernt sind. Mit ihrer Hilfe erhält man auch den Mittelpunkt $M_{\overline{AB}}$ der Strecke.

Konstruktion der Winkelhalbierenden w eines Winkels φ

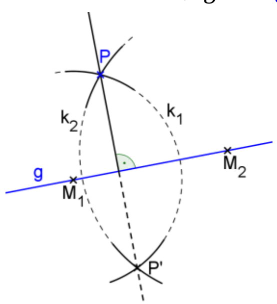
Idee: Man wählt zwei Schenkelpunkte A und B, die vom Scheitel S gleich weit entfernt sind und konstruiert dann die Symmetrieachse zu den Punkten A und B.

Zusatz: Die Winkelhalbierende w_φ besteht aus genau den Punkten, die von den beiden Schenkeln des Winkles jeweils den gleichen Abstand haben.



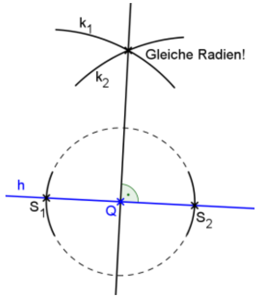
Grundkonstruktionen 2

Lot fällen von $P \notin g$ auf g:



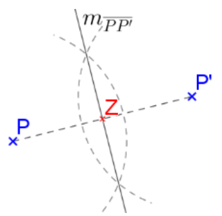
Idee: Man spiegelt den Punkt P an der „Symmetrieachse“ g.

Lot errichten in $Q \in h$ auf h:



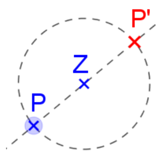
Idee: Man wählt zwei Punkte S_1 und S_2 auf h, die von Q gleich weit entfernt sind und konstruiert dann deren Symmetrieachse.

Symmetriezentrum Z:



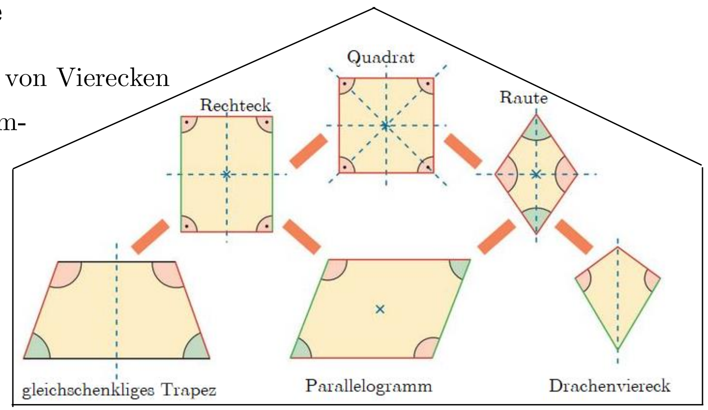
Idee: Konstruiere $m_{\overline{PP'}}$.

Punktsymmetrischer Punkt P':



Haus der Vierecke

Die besonderen Arten von Vierecken können nach ihren Symmetrieeigenschaften im Haus der Vierecke sortiert werden.



Richtig oder falsch?

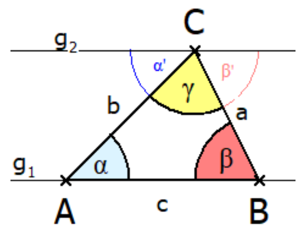
Nur Rechtecke sind punkt- und achsensymmetrisch.
Falsch. Rauten sind es z.B. auch (siehe Haus der Vierecke).

Bei einem Drachenviereck sind zwei Winkel gleich groß.
Richtig. Auf Grund der Achsensymmetrie bzgl. der einen Diagonalen sind zwei Winkel gleich groß.

Logik – Satz und Kehrsatz

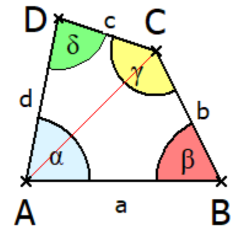
Mathematischer Satz:	*Eine Primzahl hat nur zwei Teiler.*
Ein mathematischer Satz kann in die **Wenn-dann-Form** gebracht werden. Der **Wenn-Teil** ist die Voraussetzung, der **Dann-Teil** die Behauptung.	***Wenn*** *eine Zahl eine Primzahl ist,* ***dann*** *hat sie nur zwei Teiler.*
Vertauscht man in einem Satz die Voraussetzung und die Behauptung, so erhält man den **Kehrsatz**.	*Wenn eine Zahl nur zwei Teiler hat, dann ist sie eine Primzahl.*
Sind Satz und Kehrsatz wahr, so können Satz und Kehrsatz durch die kurze Formulierung „…**genau dann …, wenn** …“ zusammengefasst werden.	*Eine Zahl ist genau dann Primzahl, wenn sie nur zwei Teiler hat.*

Winkelsumme im Dreieck



Satz: In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.

Winkelsumme im Viereck



Satz: In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme 360°.

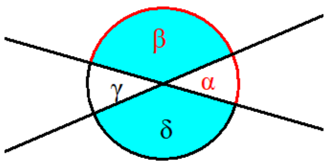
Winkelsumme im n-Eck:

Satz: In jedem n-Eck beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2)\cdot 180°$.

Aufgabe: *Die Innenwinkelsumme eines Vielecks beträgt 1080°. Wie viele Ecken besitzt das Vieleck?*

Ansatz: $(n-2)\cdot 180° = 1080° \,\big|: 180° \Rightarrow n-2 = 6 \,\big| +2 \Rightarrow n = 8$; Antw.: Es hat 8 Ecken.

Winkel an einer Geradenkreuzung

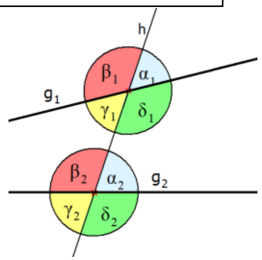


Nebeneinanderliegende Winkel an einer Geraden, wie α und β, bezeichnet man als **Nebenwinkel**.

Gegenüberliegende Winkel, wie β und δ oder α und γ, bezeichnet man als **Scheitelwinkel**.

Satz: **Nebenwinkel** ergänzen sich zu 180°. **Scheitelwinkel** sind gleich groß.

Winkel an einer Doppelkreuzung



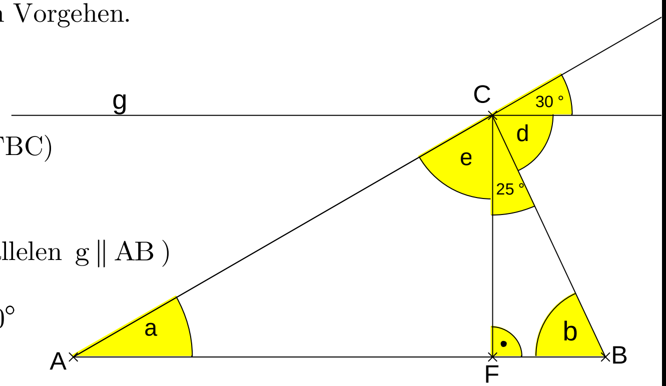
Gleichliegende Winkelpaare heißen Stufenwinkel bzw. F-Winkel (z.B. α_1 und α_2 oder β_1 und β_2).

Wechselseitig liegende Winkelpaare heißen Wechselwinkel bzw. Z-Winkel (z.B. γ_1 und α_2 oder β_1 und δ_2).

Satz: Stufen- oder Wechselwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die zwei Geraden der Doppelkreuzung parallel sind.

Aufgaben zu Winkeln

In der nebenstehenden Figur ist AB || g. Bestimme die Größe der Winkel β, δ, ε und α. Begründe jeweils dein Vorgehen.



Lsg.:

$\beta = 180° - 90° - 25° = 65°$
(Winkelsumme im Dreieck FBC)

$\delta = \beta = 65°$
(Wechselwinkel an den Parallelen $g \parallel AB$)

$\varepsilon = 180° - 30° - 25° - \delta = 60°$
(Nebenwinkel)

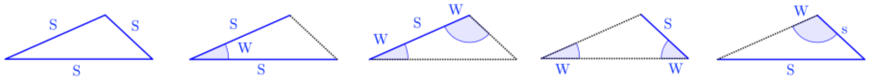
$\alpha = 30°$ (Stufenwinkel an den Parallelen $g \parallel AB$)

Kongruenz und Dreieckskongruenzsätze

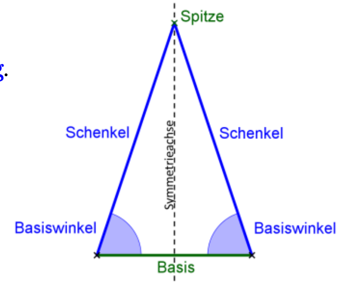
Lassen sich zwei Figuren F_1 und F_2 durch Aufeinanderlegen vollständig zur Deckung bringen, so bezeichnet man sie als deckungsgleich oder **kongruent**.

Zwei Dreiecke sind bereits dann kongruent, wenn sie in den folgenden drei Bestimmungsstücken übereinstimmen:

- drei Seiten (SSS)
- zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (SWS)
- eine Seite und deren anliegenden Winkeln (WSW)
- eine Seite, einem anliegenden Winkel und dem Gegenwinkel (SWW)
- zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite (SsW)

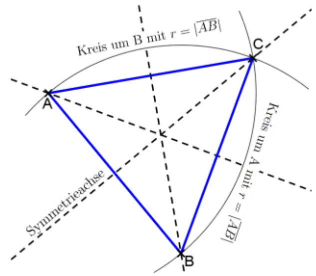


Gleichschenkliges Dreieck



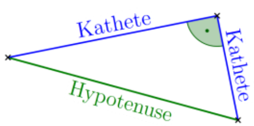
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenklig**.
Gleichschenklige Dreiecke sind stets achsensymmetrisch.
Basiswinkelsatz: Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann besitzt es zwei gleich große Winkel.
Kehrsatz des Basiswinkelsatzes: Wenn ein Dreieck zwei gleich große Winkel besitzt, dann ist es gleichschenklig.

Gleichseitiges Dreieck

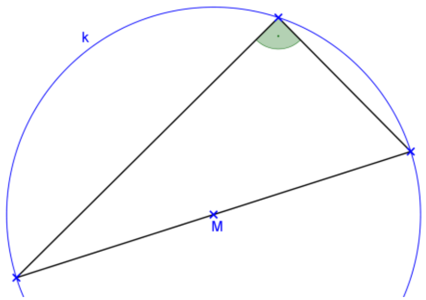


Sind in einem Dreieck alle Seiten gleich lang, bezeichnet man es als **gleichseitig**.
Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel **60°**.

Rechtwinkliges Dreieck



Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel heißt **rechtwinklig**.

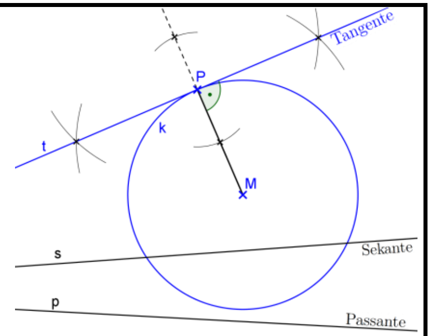


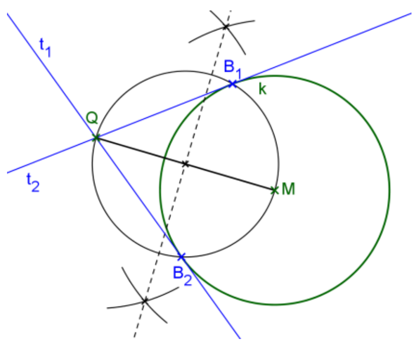
Satz des Thales: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks so auf einem Kreis k, dass eine der Dreiecksseiten den Kreisdurchmesser bildet, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Kehrsatz des Satzes des Thales: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Hypotenuse des Dreiecks der Durchmesser des Dreiecksumkreises.

Kreis und Gerade – Tangente

Eine Tangente t steht stets im Berührpunkt $P \in k$ auf dem zugehörigen Kreisradius $\overline{MP}$ senkrecht.

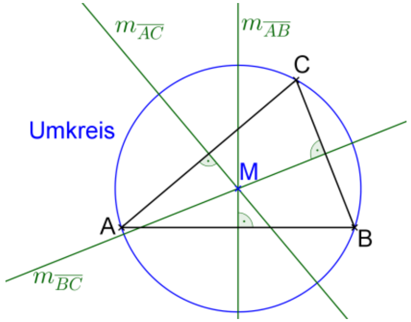


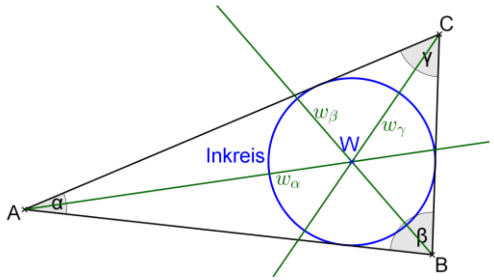


Die beiden Tangenten t_1 und t_2 des Kreises k um M, die durch einen Punkt Q außerhalb des Kreises verlaufen, berühren den Kreis k in seinen Schnittpunkten mit dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{MQ}$.

Umkreis und Inkreis eines Dreiecks

Alle Eckpunkte eines Dreiecks liegen auf einem Kreis, dem sogenannten **Umkreis**.
Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.





In jedem Dreieck gibt es einen sogenannten **Inkreis**, der alle drei Dreiecksseiten berührt.
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W, dieser ist der Inkreismittelpunkt.

Konstruktionsbeschreibung und Konstruktion

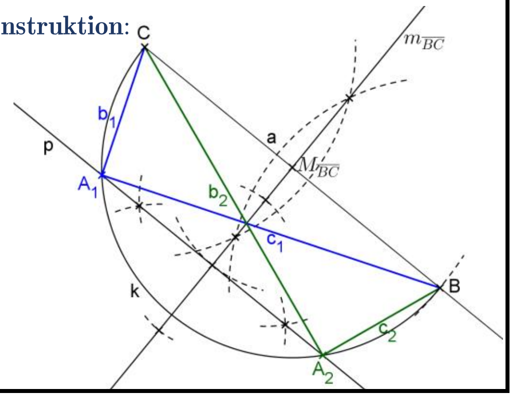
Bei einer Konstruktionsaufgabe liegt normalerweise ein **Bauplatz** vor und man startet mit einer **Planfigur**. Für eine gute Nachvollziehbarkeit schreibt man dann eine **Konstruktionsbeschreibung,** bevor man die eigentliche **Konstruktion** anfertigt.

Beispiel: Zu konstruieren ist ein Dreieck mit $|\overline{BC}| = 7\ cm$, $\alpha = 90°$ und $h_c = 3\ cm$.

Konstruktionsbeschreibung:

1. Übertrage die Strecke a, dadurch sind B und C festgelegt.
2. Der Punkt A liegt auf
   I. dem Thaleskreis k über $\overline{BC}$.
   II. der Parallelen p zu $\overline{BC}$ im Abstand h_c zu $\overline{BC}$.

Konstruktion:



- Diesen Grundwissenskatalog solltest du in deinen Grundwissensordner abheften.
- Der Grundwissenskatalog bietet dir eine Übersicht über die wichtigsten Themen des letzten Schuljahres.
- Für die **Grundwissensaufgabe** in der **Schulaufgabe** solltest du zu den einzelnen Themen bei Bedarf noch Übungsaufgaben machen. Hierzu empfehlen wir dir die für HGF-Schüler kostenlose Lernplattform www.mathegym.de.