Gewöhnliche Brüche - Grundbegriffe

Bruchschreibweise: $\dfrac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} \leftarrow$ Bruchstrich

Bedingung	Bezeichnung	Beispiel
Zähler > Nenner	**Unechter Bruch**	$\frac{4}{3}$
Zähler < Nenner	**Echter Bruch**	$\frac{3}{4}$
Nenner teilt Zähler	**Scheinbruch**	$\frac{6}{3}$

Unechte Brüche kann man in **gemischte Zahlen** umwandeln.

Bsp.: $\dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$ und umgekehrt: $8\dfrac{2}{3} = \dfrac{8 \cdot 3 + 2}{3} = \dfrac{24+2}{3} = \dfrac{26}{3}$

Anteile – Bruchteile – Ganze

Brüche geben den <u>Anteil</u> eines <u>Bruchteils</u> am <u>Ganzen</u> an.

Bsp.: Die Stange ist das Ganze.

Die gefärbte Fläche ist ein Bruchteil.

Der Anteil beträgt $\dfrac{3}{4}$ (vom Ganzen).

Bruchteil gesucht:

$\dfrac{3}{4}$ von $8\,cm =$

$= \left(8\,cm : 4\right) \cdot 3 = 6\,cm;$

oder

$\dfrac{3}{4} \bullet 8\,cm = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{8}{1}\,cm =$

$\underset{4}{=} \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1}\,cm = 6\,cm;$

Ganze gesucht:

$\dfrac{3}{4}$ von $x = 6\,cm$

$x = \left(6\,cm : 3\right) \cdot 4 = 8\,cm;$

oder Umkehraufgabe

$\dfrac{3}{4} \bullet x = 6\,cm;$

$x = 6\,cm : \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{1} \cdot \dfrac{4}{3}\,cm \underset{3}{=} 8\,cm;$

Anteil gesucht:

$6\,\text{cm}$ von $8\,\text{cm}$

der Anteil ist $\dfrac{6\,cm}{8\,cm} = \dfrac{3}{4};$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Ein Bruch wird **erweitert**, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden. Bsp.: $\dfrac{5}{6} = \dfrac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \dfrac{15}{18}$ kurz: $\dfrac{5}{6} \overset{3}{=} \dfrac{15}{18}$

Ein Bruch wird **gekürzt**, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert werden. Bsp.: $\dfrac{15}{18} = \dfrac{15 : 3}{18 : 3} = \dfrac{5}{6}$ kurz: $\dfrac{15}{18} \underset{3}{=} \dfrac{5}{6}$

Schwierigere Kürzen-Aufgaben:

$$\frac{\underline{\underline{15}} \cdot 33 \cdot 3}{66 \cdot \underline{\underline{15}} \cdot 30} \underset{15}{=} \frac{33 \cdot \underline{3}}{66 \cdot \underline{\underline{30}}} \underset{3}{=} \frac{\underline{\underline{33}}}{\underline{\underline{66}} \cdot 10} \underset{33}{=} \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20};$$

$$\frac{\underline{4} \cdot 9 \cdot 30}{\underline{2} \cdot 5 \cdot 24 \cdot \underline{2}} \underset{4}{=} \frac{9 \cdot \underline{\underline{30}}}{5 \cdot \underline{\underline{24}}} \underset{6}{=} \frac{9 \cdot \underline{5}}{\underline{5} \cdot 4} \underset{5}{=} \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$$

In Ergebnissen werden Brüche normalerweise **vollständig gekürzt** angegeben. Unechte Brüche schreibt man als gemischte Zahlen.

Hauptnenner

Zum Vergleichen zweier Brüche kann man diese auf den gleichen Nenner bringen („gleichnamig machen“). Der kleinste gemeinsame Nenner mehrerer Brüche heißt **Hauptnenner HN** (= kgV aller Nenner).

Bsp.: Mache die Brüche $\dfrac{5}{12}$ und $\dfrac{7}{15}$ gleichnamig mithilfe des HNs.

1. Möglichkeit: <u>Probieren</u> (Betrachtung der Vielfachen des größeren Nenners)

   Vielfache von 15: 15; 30; 45; <u>60</u>

   $\Rightarrow$ HN = 60, weil 60 die kleinste Zahl ist, die auch ein Vielfaches von 12 ist.

   $\dfrac{5}{12} \overset{5}{=} \dfrac{25}{60};$ $\dfrac{7}{15} \overset{4}{=} \dfrac{24}{60};$

2. Möglichkeit: <u>Primfaktorzerlegung</u> der Nenner (siehe evtl. Heft)

Dezimale Schreibweise

Zahlen, die mindestens eine Nachkommastelle haben, heißen **Dezimalbrüche**.

Dabei bedeutet die 1. (2., 3., ...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendstel, ...). Die Ziffern rechts vom Komma werden **Dezimalen** genannt.

Bsp.: $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; $1{,}234 = 1\frac{234}{1000} = 1\frac{117}{500}$

Dezimalbrüche mit unendlich vielen, sich wiederholenden Dezimalen nennt man

periodische Dezimalbrüche. Bsp.: $0{,}\overline{4} = 0{,}444...$; $1{,}2\overline{34} = 1{,}2343434...$

Runden von Dezimalbrüchen

Ist die erste wegzulassende Ziffer 0, 1, 2, 3, 4, so wird abgerundet ↓ ,

ist sie 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet ↑ .

Bsp.: Runden auf	1 Dez.	2 Dez.	3 Dez.
3,4564	$\approx 3{,}5$	$\approx 3{,}46$	$\approx 3{,}456$

Brüche in Dezimalbrüche umwandeln

a) Mit Hilfe einer Stufenzahl im Nenner

Die Anzahl der Endnullen der Stufenzahl im Nenner gibt die Anzahl der Dezimalstellen vor.

einfach: $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{3}{1000} = 0{,}003$; $\frac{237}{100} = 2{,}37$;

komplizierter: $\frac{3}{250} \overset{4}{=} \frac{12}{1000} = 0{,}012$; $\frac{35}{140} \underset{7}{=} \frac{5}{20} \overset{5}{=} \frac{25}{100} = 0{,}25$;

b) Mit Hilfe der Division des Zählers durch den Nenner

Überschreitet man beim Dividenden das Komma, musst du im Ergebnis auch das Komma setzen.

$$\frac{3}{4} = 3{,}00 : 4 = 0{,}75$$

$$\begin{array}{r} -0\downarrow \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline - \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = 5{,}000 : 6 = 0{,}833... = 0{,}8\overline{3};$$

$$\begin{array}{r} -0\downarrow \\ \hline 50 \\ -48 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ \vdots \end{array}$$

Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

- Forme den Term passend um.
- Schreibe die Kommazahlen in einer Nebenrechnung untereinander.
- Fehlende Nachkommastellen musst du in der NR mit Nullen ergänzen.

Bsp.:

$3{,}716 - 4{,}82 = -\left(4{,}82 - 3{,}716\right) = -1{,}104$;

NR:
$$\begin{array}{r} 4{,}820 \\ -\ 3{,}716 \\ \hline 1{,}104 \end{array}$$

Multiplikation von Dezimalbrüchen

- Überlege dir das Vorzeichen.
- Multipliziere in einer Nebenrechnung die Faktoren ohne Beachtung des Kommas und des Vorzeichens.
- Das Komma wird so gesetzt, dass das Endergebnis so viele Dezimalen hat wie beide Faktoren zusammen.

Bsp.:

$0{,}04 \cdot \left(-1{,}2\right) = -0{,}\underline{04} \cdot 1{,}\underline{2} = -0{,}\underline{048}$;

NR:
$$\begin{array}{r} \underline{4 \cdot 12} \\ 40 \\ \underline{+\ \ 8} \\ 48 \end{array}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

- Mache die Brüche mit Hilfe des Hauptnenners gleichnamig.
- Addiere (Subtrahiere) die Zähler und behalte den Nenner bei.

Bsp.:

$-\frac{1}{14} + \frac{5}{6} = -\frac{3}{42} + \frac{35}{42} = \frac{-3+35}{42} = \frac{32}{42} \underset{2}{=} \frac{16}{21}$;

NR: Vielfache von 14: 14; 28; $\underline{42}$

$\Rightarrow HN = 42$

Multiplikation von Brüchen

- Kürze wenn möglich vor dem Rechnen!
- Rechne Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.
- Gemischte Zahlen sollten vorher in unechte Brüche umgewandelt werden.

Bsp.:

$-\frac{6}{15} \cdot \left(-\frac{35}{18}\right) = +\frac{\overline{6} \cdot \overline{\overline{35}}}{\underline{\underline{15}} \cdot \underline{18}} \underset{6;\,7}{=} \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$;

$1\frac{1}{18} \cdot 4\frac{1}{2} = \frac{19}{\underline{18}} \cdot \frac{\overline{9}}{2} \underset{9}{=} \frac{19 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$;

$3\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{1} \underset{2}{=} \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{14}{1} = 14$;

Division bei Dezimalbrüchen

- Überlege dir das Vorzeichen.
- In der Nebenrechnung verschiebt man dann das Komma des Dividenden und des Divisors gemeinsam so weit nach rechts, bis der Divisor eine ganze Zahl ist.
- Beim Überschreiten des Kommas im Dividenden muss auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

Bsp.:

$0{,}69 : \left(-0{,}3\right) = -2{,}3$

$$NR: \quad \begin{array}{l} 6{,}9 : 3 = 2{,}3 \\ \underline{-6} \\ \;09 \\ \;\underline{-9} \\ \;\;- \end{array}$$

Division bei gewöhnlichen Brüchen

Du dividierst durch einen Bruch, indem du mit seinem Kehrbruch multiplizierst.

Bsp.: $\left(-\frac{3}{14}\right) : \left(-\frac{6}{35}\right) = +\frac{3}{14}\cdot\frac{35}{6} \underset{3;7}{=} \frac{1\cdot 5}{2\cdot 2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$; $\quad \frac{7}{4} : 5 = \frac{7}{5} : \frac{5}{1} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{25}$;

Bei **Doppelbrüchen** ersetzt du den Hauptbruchstrich durch ein Divisionszeichen und rechnest dann wie gewohnt.

$$\frac{3}{\frac{2}{5}} = 3 : \frac{2}{5} = 3\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2};$$

Potenzen

Achte beim Potenzieren von Brüchen darauf, wo sich der Exponent befindet:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}; \qquad \text{aber} \quad \frac{2^3}{5} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$$

oder

$$\left(-1\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-1{,}4\right)^2 = \left(-1{,}4\right)\cdot\left(-1{,}4\right) = +1{,}96; \;\; \text{aber} \; -\left(1\frac{2}{5}\right)^2 = -\left(1{,}4\right)\cdot\left(1{,}4\right) = -1{,}96$$

Potenzen mit negativen Exponenten

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{Q} \setminus \left\{0\right\} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{16}; \;\; \text{oder} \;\; \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = 1\cdot\frac{9}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Prozentangaben

Eine alternative Schreibweise für gewöhnliche Brüche oder Dezimalzahlen sind Prozentangaben.

„Prozent“ heißt „Hundertstel“, d. h. „12 %“ bedeutet „Zwölf Hundertstel“,

Bsp.: $12\ \% = \frac{12}{100} = 0{,}12$; $\qquad 100\ \% = \frac{100}{100} = 1$; $\qquad 200\ \% = \frac{200}{100} = 2.$

Wandle in eine Prozentangabe um, indem du einen Hundertstelbruch erzeugst:

$$\frac{1}{50} \overset{2}{=} \frac{2}{100} = 2\ \%; \;\; \text{oder} \;\; 0{,}3 = \frac{3}{10} \overset{10}{=} \frac{30}{100} = 30\ \%; \;\; \text{oder} \;\; \frac{5}{125} \underset{5}{=} \frac{1}{25} \overset{4}{=} \frac{4}{100} = 4\ \%$$

Wandle in Prozent um, indem du das Komma um zwei Stellen nach rechts verschiebst:

$0{,}3 = 0{,}\underline{30}0 = 30{,}0\ \%$; $\quad$ oder $1{,}\underline{89}5 = 189{,}5\ \%$ $\quad$ oder $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}\underline{33}333... = 33{,}\overline{3}\ \%$

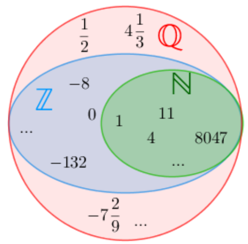
Häufige Umwandlungen (Bruch-, Dezimal- und Prozentzahlen)

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 33{,}\overline{3}\ \%$	$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\ \%$		
$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$	$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$	$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\ \%$	
$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$	$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\ \%$	$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\ \%$	$\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\ \%$
$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$	$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$	$\frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$	$\frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\ \%$
$\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1} = 11{,}\overline{1}\ \%$	$\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2} = 22{,}\overline{2}\ \%$	$\frac{4}{9} = 0{,}\overline{4} = 44{,}\overline{4}\ \%$	$\frac{9}{9} = 0{,}\overline{9} = 1 = 100\ \%$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

Die Menge aller positiven und negativen Bruchzahlen und die Null bilden die **Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$**.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind Teil von $\mathbb{Q}$.

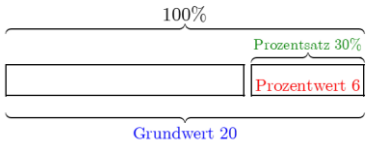


Prozentrechnung

Prozentrechnung ist Bruchrechnung, nur mit anderen Begriffen:

Anteil		Ganze		Bruchteil
$\frac{3}{10}$ bzw. $0,3$	von	20	sind	6
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
30 %	von	20	sind	6
Prozentsatz PS		Grundwert GW		Prozentwert PW

Veranschaulichung mit einer informativen Skizze:



Grundgleichung der Prozentrechnung: $\boxed{\mathrm{PS} \cdot \mathrm{GW} = \mathrm{PW}}$

Bsp.: $30\,\% \cdot 20 = 6$

Grundaufgaben der Prozentrechnung

Prozentwert gesucht	Grundwert gesucht	Prozentsatz gesucht
$75\,\%$ von $8\,cm$	$75\,\%$ von $? = 6\,cm$	$6\,cm$ von $8\,cm$
$PW = PS \cdot GW;$	$PW = PS \cdot GW;$	$PW = PS \cdot GW;$
$PW = 0,75 \cdot 8\,cm = 6\,cm;$	$6\,cm = 0,75 \cdot GW$	$6\,cm = PS \cdot 8\,cm;$
	$GW = 6\,cm : 0,75 = 8\,cm;$	$PS = \frac{6\,cm}{8\,cm} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\,\%;$

oder z.B. Bruchrechnung:

$$PW = \frac{75}{100} \cdot 8\,cm = \frac{3}{4} \cdot 8\,cm = 6\,cm;$$

oder z.B. Schlussrechnung:

75 % vom GW sind 6 cm.
25 % vom GW sind 2 cm.
100 % vom GW sind 8 cm.

Anstatt mit der Grundgleichung kann die Prozentrechnung auch mithilfe der Bruchrechnung (siehe Kärtchen Anteile-Bruchteile-Ganze) oder der Schlussrechnung (siehe Kärtchen im Grundwissen der 5ten) durchgeführt werden.

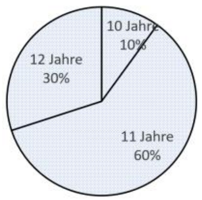
Absolute und relative Häufigkeiten

Bsp.: Befragung von Schülern nach ihrem Alter. Die Gesamtanzahl n der Befragten ist 30.

Alter	10	11	12	Summe
absolute Häufigkeit H	3	18	9	30
relative Häufigkeit h	$\frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 10\,\%$	$\frac{18}{30} = \frac{6}{10} = 60\,\%$	$\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 30\,\%$	100 %
Winkel im Kreisdiagramm	$\frac{1}{10}$ von $360° = 36°$	$\frac{6}{10}$ von $360° = 216°$	$\frac{3}{10} \cdot 360° = 108°$	360°

- Absolute Häufigkeit H: Die Anzahl, mit der ein bestimmter Wert auftritt.
- Relative Häufigkeit $h = \dfrac{\text{absolute Häufigkeit H}}{\text{Gesamtanzahl n}}$

Darstellung der relativen Häufigkeiten in einem beschrifteten Kreisdiagramm:



Arithmetisches Mittel

Das **arithmetische Mittel $\overline{m}$** gibt den Durchschnittswert aller Werte an.

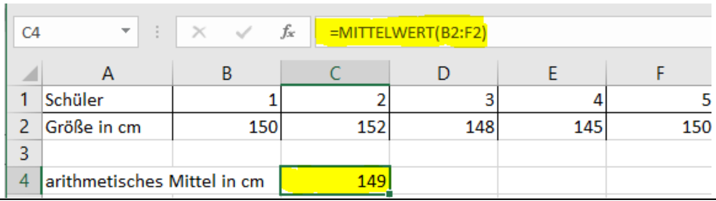
$$\boxed{\text{Arithmetisches Mittel } \overline{m} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Gesamtanzahl}}}$$

1. Bsp.: Durchschnittalter der befragten Schüler auf der linken GW-Karte

$$\overline{m} = \frac{\text{Summe der Alterszahlen aller Schüler}}{\text{Anzahl aller Schüler}} = \frac{3 \cdot 10 + 18 \cdot 11 + 9 \cdot 12}{30} = \frac{336}{30} = \frac{112}{10} = 11{,}2$$

Antw.: Das Durchschnittsalter der befragten Schüler beträgt 11,2 Jahre.

2. Bsp.: Durchschnittsgröße von 5 Schülern mit Hilfe eines TKP:



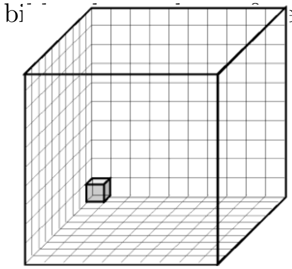
C4 =MITTELWERT(B2:F2)

	A	B	C	D	E	F
1	Schüler	1	2	3	4	5
2	Größe in cm	150	152	148	145	150
3						
4	arithmetisches Mittel in cm		149			

Volumeneinheiten

1000 kleine Einheitswürfel bi… en.

Hat ein Würfel die Kantenlänge	so ist sein Volumen
1 mm	1 mm^3
1 cm	1 cm^3 = 1 ml
1 dm	1 dm^3 = 1 l
1 m	1 m^3



Kubikmaß: Umrechnungszahl 1000 (Kommaverschiebung um 3 Stellen):

$$1\,m^3 \xleftrightarrow{1000} 1\,dm^3 \xleftrightarrow{1000} 1\,cm^3 \xleftrightarrow{1000} 1\,mm^3$$

Litermaß: Umrechnungszahl nicht einheitlich:

$$1\,hl\ \text{("1 Hektoliter")} \xleftrightarrow{100} 1\,l \xleftrightarrow{1000} 1\,ml\ \text{("1 Milliliter")}$$

Bsp.: Kubikmaß 23,45 cm^3 = 23450 mm^3 = 0,02345 dm^3 = 0,00002345 m^3

Litermaß 23,45 cm^3 = 23,45 ml = 0,02345 l = 0,0002345 hl

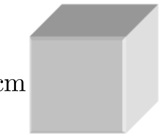
Volumen eines Quaders

$$\boxed{V_Q = l \cdot b \cdot h}$$

Bsp.: $V_Q = 0,5\,m \cdot 10\,cm \cdot 3\,dm = 5\,dm \cdot 1\,dm \cdot 3\,dm = 15\,dm^3 = 15\,l$

Volumen eines Würfels

$$\boxed{V_W = a^3}$$

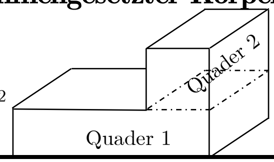


Bsp.: $V_W = (1,5\,cm)^3 = 1,5\,cm \cdot 1,5\,cm \cdot 1,5\,cm = 2,25\,cm^2 \cdot 1,5\,cm = 3,375\,cm^3$

Volumen zusammengesetzter Körper

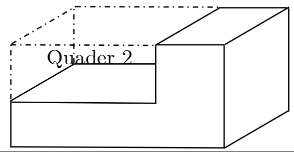
durch Zerlegen:

$V_{ges} = V_{Q1} + V_{Q2}$

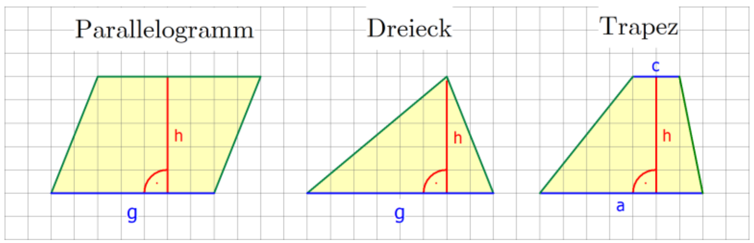


oder Ergänzen:

$V_{ges} = V_{Q1} - V_{Q2}$



Flächeninhalt von Parallelogramm, Dreieck und Trapez



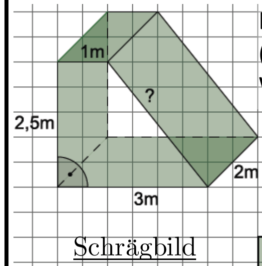
Parallelogrammflächeninhalt = Grundseite mal Höhe: $A_{Parallelogramm} = g \cdot h$

Dreiecksflächeninhalt = $\frac{1}{2}$ mal Grundseite mal Höhe: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

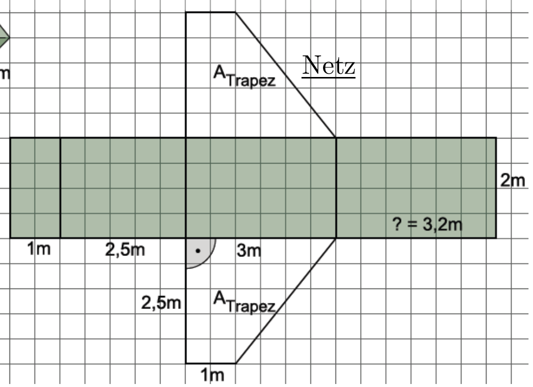
Trapezflächeninhalt = $\frac{1}{2}$ mal Parallelseitensumme mal Höhe: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

Beachte: Die Höhen im Parallelogramm bzw. Trapez stehen senkrecht auf den zugehörigen Grundlinien. Im Dreieck beginnen die Höhen zusätzlich noch am gegenüberliegenden Eckpunkt.

Netze und Oberflächeninhalt



Bsp.: 4-seitiges gerades Prisma (Grund-/Deckfläche sind 2 Trapeze mit rechtem Winkel; alle 4 Seitenflächen sind Rechtecke)



Klappt man alle Seitenflächen eines Körpers in eine Ebene auseinander, so erhält man ein **Netz des Körpers**. Daraus können z. B. fehlende Seitenlängen gemessen und der **Oberflächeninhalt O** des Körpers gut berechnet werden:

$$O = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (3\,m + 1\,m) \cdot 2,5\,m}_{A_{Trapez}} + \underbrace{(1\,m + 2,5\,m + 3\,m + 3,2\,m)}_{\text{Längen der 4 Seiten}} \cdot \underbrace{2\,m}_{\text{Seitenhöhe}} = 10\,m^2 + 19,4\,m^2 = 29,4\,m^2$$