Natürliche Zahlen, ganze Zahlen und weitere Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1;2;3;...\}$ Menge der **natürliche Zahlen**

$\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3;...\}$ Menge der **natürliche Zahlen mit Null**

$\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

$\mathrm{V}(4) = \{4;8;12;...\}$ Menge der **Vielfachen von 4**

$T(15) = \{1;3;5;15\}$ Menge der **Teiler von 15**

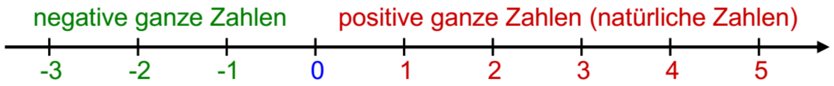
Eine Menge besteht aus **Elementen**: $2 \in \mathbb{N}$; $-4 \notin \mathbb{N}$; $10 \in V(5)$

Primzahlen sind natürliche Zahlen, deren Teilermengen aus genau zwei Zahlen bestehen (die 1 und sie selbst): 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29;...

Jede natürliche Zahl lässt sich solange in Faktoren zerlegen, bis alle Faktoren Primzahlen sind. Dies nennt man **Primfaktorzerlegung**.

Bsp.: $1400 = 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = \underbrace{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5}_{\text{Primfaktorzerlegung}} = \underbrace{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7}_{\text{übersichtliche Primfaktorzerlegung in Potenzschreibweise}}$

Die Zahlengerade



Die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen muss stets gleich groß sein. Man nennt sie Einheit.

Eine Zahlengerade hat eine Pfeilspitze. Diese zeigt an, in welche Richtung die Zahlen größer werden.

Die Entfernung einer Zahl von der Null heißt **Betrag** der Zahl:

$|-4| = 4$; "Der Betrag von -4 ist 4" $|+3| = 3$

Bsp.: Zahlen, deren Betrag kleiner als 3 sind: $-2;-1;0;1;2$

Zahlen mit gleichem Abstand zur 0 heißen **Zahl** und **Gegenzahl**:

-4 und 4 oder -6 und 6

Stellenwertsystem, Stellenwerttafel und Zehnerpotenzen

Wir benutzen zum Zahlenschreiben die zehn Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Der Wert der Ziffer hängt von der Stelle ab, an der sie steht. Deshalb heißt unser Zahlensystem **Stellenwertsystem**. Aus einer **Stellenwerttafel** kann man den Wert der einzelnen Ziffern schnell entnehmen.

Milliarden			Millionen			Tausender					
HMd	ZMd	Md	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
	7	0	0	2	3	0	8	0	0	0	1

Gesprochen: siebzig Milliarden dreiundzwanzig Millionen achtzigtausendeins

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, … nennt man **Stufenzahlen**.
Naturwissenschaftler schreiben diese oft kurz als **Zehnerpotenz**:

$10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; ...; $1\,000\,000 = 10^6$; ...

Große Zahlen können mit Hilfe der Zehnerpotenzen abgekürzt werden:

$30\,000 = 3 \cdot 10\,000 = 3 \cdot 10^4$; $21\;000\,000 = 21 \cdot 10^6$

Runden

Im Alltag werden Zahlen oft auf Zehner, Hunderter, Tausender, … gerundet angegeben. Dazu nähert man sie durch den nächstgelegenen Zehner, Hunderter, Tausender, ... an.

Bsp.: $851\,(H) \approx 900$; $1001\,(T) \approx 1000$; $149\,(H) \approx 100$; $5\,(Z) \approx 10$

Rundungsregel:

Beim Runden auf Zehner, Hunderter, Tausender, ... entscheidet die Ziffer rechts neben dieser Stelle, ob auf- oder abgerundet wird. Ist diese Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 rundet man ab $\downarrow$. Bei den Ziffern 5, 6, 7, 8, oder 9 rundet man auf $\uparrow$.

Bsp.: $315\,493\,(T) = 31\underline{5}\,\boxed{4}93 \approx 315\,000$;

$315\,493\,(H) = 315\,\underline{4}\boxed{9}3 \approx 315\,500$;

Fachbegriffe für die Rechenarten

Beispiel	Termname	12 heißt	3 heißt	Rechenart
$12+3$	Summe	1. Summand	2. Summand	Addition
$12-3$	Differenz	Minuend	Subtrahend	Subtraktion
$12\cdot 3$	Produkt	1. Faktor	2. Faktor	Multiplikation
$12:3$	Quotient	Dividend	Divisor	Division
12^3	Potenz	Basis	Exponent	Potenzieren

Aufgaben: Gliederungsbaum, Rechenbaum, Term in Wortform, …

Addition ganzer Zahlen

Regel 1: Summanden mit **gleichen Vorzeichen**:

- Addiere die Beträge.
- Das Ergebnis bekommt das gemeinsame Vorzeichen.

Beispiele:

$(-27)+(-13)$

$NR.: \quad 27+13=40;$

$(-27)+(-13)=-40;$

Regel 2: Summanden mit **unterschiedlichen Vorzeichen**:

- Ziehe vom größeren Betrag den kleineren ab.
- Das Ergebnis bekommt das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

$(+13)+(-35)$

$NR.: \quad 35-13=22;$

$\Rightarrow (+13)+(-35)=-22;$

Subtraktion ganzer Zahlen

Man subtrahiert eine ganze Zahl, indem man ihre Gegenzahl addiert.

Bsp.: $(+13)-(+35)=(+13)+(-35)\overset{R2}{=}-(35-13)=-22;$

Addition und Subtraktion mit Hilfe einer Zahlengeradenwanderung

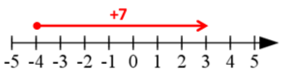
Die **vereinfachte Schreibweise**:

- Das Vorzeichen + sowie die Klammern um die erste Zahl kannst du weglassen.
- $+(+\ )=+;\qquad -(-\ )=+;$
  $+(-\ )=-;\qquad -(+\ )=-;$

  Bsp.: $(+3)+(-4)-(+7)-(-2)=3-4-7+2;$

Liegt der Term in **vereinfachter Schreibweise** vor, kannst du das Ergebnis erwandern: Addieren bedeutet nach rechts und Subtrahieren nach links laufen.

Bsp.: $-4-(-7)=-4+7=\ldots=3;$ $\qquad 4+(-6)=4-6=\ldots=-2;$



Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Man multipliziert/ dividiert zwei ganze Zahlen, indem man
- die Beträge multipliziert/ dividiert
- dem Ergebnis folgendes Vorzeichen gibt:

  (1) ein **Plus,** falls die Vorzeichen gleich waren,

  (2) ein **Minus,** falls die Vorzeichen nicht gleich waren.

$\cdot / \div$	+	−
+	+	−
−	−	+

Multiplikation	**Division**
$6\cdot 3=18;$	$6:3=2;$
$(-6)\cdot(-3)=+18;$	$(-6):(-3)=+2;$
$6\cdot(-3)=-18:$	$6:(-3)=-2;$
$(-6)\cdot 3=-18;$	$(-6):3=-2;$

Vorsicht : $43:0$ ist nicht definiert! Aber: $0:43=0;$

Potenzieren

Für ein Produkt mit gleichen Faktoren gibt es die **Potenzschreibweise**:

$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\text{4 Faktoren}} = 2^4 = 16$

Der **Exponent** gibt die **Anzahl** der **gleichen Faktoren** an.

Bsp.: $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8;$ $\quad (-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81;$

Quadratzahlen

$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$

Rechengesetze

Kommutativgesetz der Addition (K.-G.)

$a + b = b + a$

$12 + 43 = 43 + 12$

Kommutativgesetz der Multiplikation

$a \cdot b = b \cdot a$

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

Assoziativgesetz der Addition (A.-G.)

$(a+b)+c = a+(b+c)$

$(2+3)+4 = 2+(3+4)$

Assoziativgesetz der Multiplikation

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

$(2\cdot 3)\cdot 4 = 2\cdot(3\cdot 4)$

Distributivgesetz (D.-G.):

"Ausmultiplizieren" ⟶

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

⟵ "Ausklammern"

Rechenvorteile durch Anwendung von Rechengesetzen:

$69+(34+31) \overset{K.-G.}{=} 69+(31+34) \overset{A.-G.}{=} (69+31)+34 = 100+34 = 134;$

$54\cdot 16 + 54\cdot 4 \overset{D.-G.}{=} 54\cdot(16+4) = 54\cdot 20 = 1080;$ $\quad 17\cdot 21 = 17\cdot(20+1) \overset{D.-G.}{=} 17\cdot 20 + 17\cdot 1 = 340+17 = 357;$

Verbindung der Grundrechenarten

Vorrangregeln:

Die Klammer sagt: „Zuerst komm ich“,
Hoch vor Punkt vor Strich.
Und was noch nicht zum Rechnen dran, <u>das schreibe unverändert an</u>!

Beispiele:

$13-3\cdot 16 \overset{\text{Punkt vor Strich}}{=} 13-48 = -35;$

$18:9-3^2\cdot 5 \overset{\text{Hoch vor Punkt}}{=} 18:9-9\cdot 5 \overset{\text{Punkt vor Strich}}{=} 2-45 = -43;$

$[(-1)^{25} - 11\cdot 5] - [13 - 8\cdot(-5)^2] = [-1-55]-[13-8\cdot 25] = [-56]-[13-200] =$

$= -56 - [-187] = -56 + 187 = +131;$

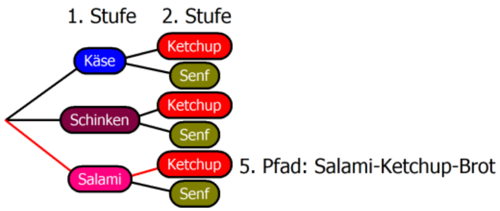
Baumdiagramm und Zählprinzip

Situationen, die aus mehreren Auswahlschritten entstehen, kann man in einem **Baumdiagramm** darstellen.

Jede **Stufe** (Ebene) des Baums entspricht einem Auswahlschritt.

Jeder **Pfad** des Baums stellt eine mögliche Gesamtsituation dar.

Bsp.: Welche Möglichkeiten gibt es für ein Pausenbrot, das mit Käse, Schinken oder Salami als erste Schicht belegt sein soll und mit Ketchup oder Senf verfeinert wird?



Zählprinzip: Die Gesamtzahl der Pfade erhält man durch Multiplizieren der Wahlmöglichkeiten auf jeder Stufe, wenn keine Einschränkungen vorliegen.

Insgesamt gibt es also $3\cdot 2 = 6$ *verschiedene Pausenbrotmöglichkeiten.*

Geometriebegriffe

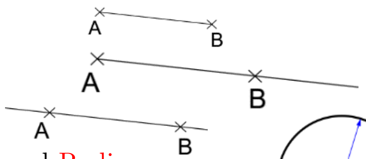
Strecke $\overline{AB}$ mit Länge $\left|\overline{AB}\right|$

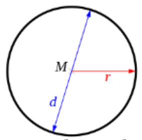
Halbgerade [AB mit Anfangspunkt A

Gerade AB

Kreislinie $k\left(M;r\right)$ mit Mittelpunkt M und Radius r.

Es gilt: Durchmesser $d = 2 \cdot r$





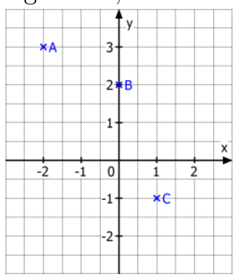
Ein **Koordinatensystem** besteht aus einer waagerechten Zahlengeraden, der **x-Achse** und einer senkrechten Zahlengeraden, der **y-Achse**.

Der gemeinsame Punkt heißt **Ursprung** O.

Ein Punkt ist durch seine Koordinaten festgelegt.

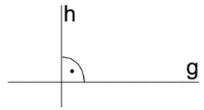
Bsp.: $A(\underset{\uparrow}{-2} \;/\; \underset{\uparrow}{3})$ oder $B\left(0/2\right)$; $C\left(1/-1\right)$

x-Koordinate "-2 waagerecht" **y-Koordinate** "3 senkrecht"



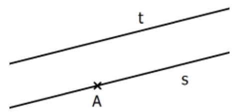
Geometrie: Lagebeziehungen

$g \perp h$: "g steht senkrecht auf h"
oder: "g ist ein Lot auf h"

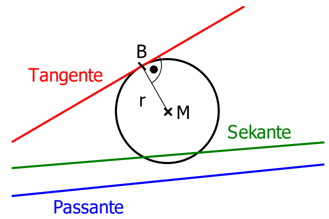


$s \parallel t$: "s ist parallel zu t"

$A \in s$: "Der Punkt A liegt auf der Geraden s."



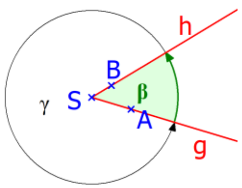
Zeichnet man einen Kreis und eine Gerade, so können diese zwei Punkte (**Sekante**), keinen (**Passante**) oder genau einen Punkt (**Tangente**) gemeinsam haben.



Eine Tangente an den Kreis im Punkt B zeichnet man, indem man das Lot durch B auf den Berührradius $\left(\overline{MB}\right)$ zeichnet.

Geometrie: Winkel

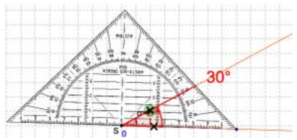
Dreht man eine Halbgerade g um ihren Anfangspunkt S *gegen den Uhrzeigersinn* bis zur Halbgeraden h, so entsteht der **Winkel β**. g nennt man dann den **ersten Schenkel**, h den **zweiten Schenkel** und S den **Scheitel**.



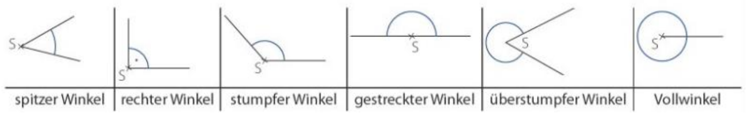
- **Bezeichnung :** $\beta = \sphericalangle A \; S \; B$ bzw.: $\gamma = \sphericalangle BSA$

  Punkt auf 1. Schenkel — Scheitel — Punkt auf 2. Schenkel

- **Winkel messen/zeichnen mit dem Geodreieck:**
  $\left[oben: \sphericalangle ASB \approx 48°; \sphericalangle BSA \approx 312°\right]$



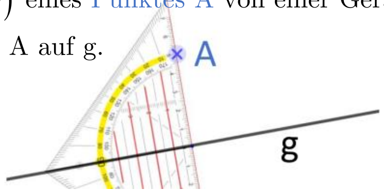
- **Winkelarten**:



Geometrie: Abstand

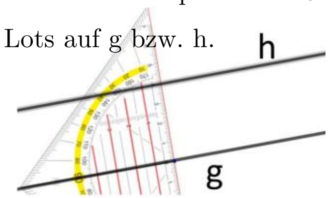
Die kürzeste Verbindungslänge zwischen zwei Objekten heißt **Abstand d**.

- Den Abstand $d\left(A;g\right)$ eines Punktes A von einer Geraden g erhält man mit Hilfe des Lots durch A auf g.



$d\left(A;g\right) = 5\,cm;$

- Den Abstand $d\left(g;h\right)$ zwischen zwei parallelen Geraden g und h erhält man mit Hilfe eines beliebigen Lots auf g bzw. h.

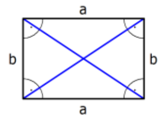


$d\left(g;h\right) = 4\,cm;$

Geometrie: Vierecke

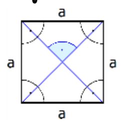
Ein **Viereck** ist eine ebene Figur mit vier Ecken. Die Verbindungsstrecken zweier nichtbenachbarter Eckpunkte nennt man **Diagonalen**.

Rechteck



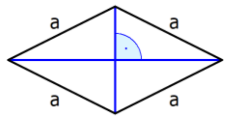
Vierecke mit vier rechten Winkeln

Quadrat



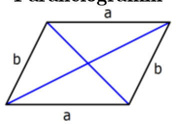
Rechteck mit vier gleich langen Seiten

Raute



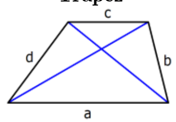
Viereck mit vier gleich langen Seiten

Parallelogramm



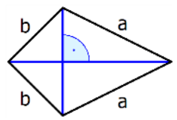
Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind

Trapez



Viereck, bei dem zwei Seiten parallel sind

Drachenviereck

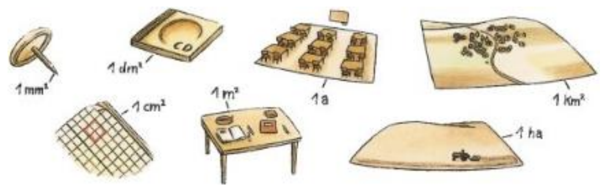


Viereck, in dem je 2 benachbarte Seiten gleich lang sind

Flächeninhaltsmessung

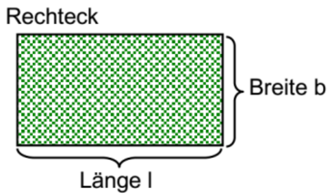
Die Größe einer Fläche wird durch die Größe **Flächeninhalt** angegeben.
Symbol: A (engl.: „area“)
Den Flächeninhalt A ermittelt man, indem man eine Fläche vollständig mit einer Vergleichsfläche auslegt.
Üblicherweise wählt man als Vergleichsflächen Quadrate mit 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 10 m, 100 m, 1 km als Seitenlängen. Deren Flächen bezeichnet man als Quadratmillimeter, Quadratzentimeter, Quadratdezimeter, Quadratmeter, Ar, Hektar, Quadratkilometer.

Größenordnungen von typischen Flächen:

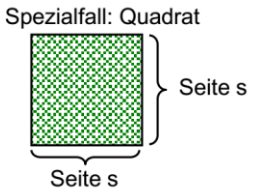


Umfang- und Flächeninhaltsformel beim Rechteck bzw. Quadrat

Der **Umfang u** einer Figur ist die Länge ihrer Randlinie. Der **Flächeninhalt A** gibt die Größe der eingeschlossenen Fläche an. Für beide Größen gibt es beim Rechteck und Quadrat auch eine Berechnungsformel.



$$u_R = 2 \cdot (l + b)$$
$$A_R = l \cdot b$$

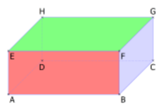


$$u_Q = 4 \cdot s$$
$$A_Q = s \cdot s = s^2$$

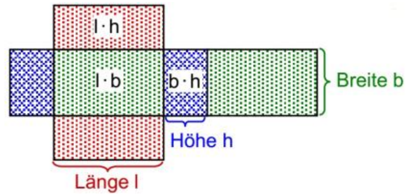
Oberflächeninhalt eines Quaders bzw. eines Würfels

Ein **Quader** ist ein Körper, der sechs Rechtecke als Begrenzungsflächen besitzt. Ein **Würfel** ist ein Quader, bei dem alle Kanten s gleich lang sind.

Schrägbild eines Quaders:



Netz eines Quaders:



Der **Oberflächeninhalt** eines Körpers ist die Summe aller Begrenzungsflächen. Für den Quader und den Würfel gibt es eine Berechnungsfomel:

$$O_Q = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$$

$$O_W = 6 \cdot s \cdot s = 6 \cdot s^2$$

Schlussrechnung (Dreisatz)

Bsp.: 1 kg Hackfleisch kostet 7,00 €. Wie viel kosten 300 g?

Dreisatzlösung:

:10 1 kg Hackfleisch kostet 7 €. :10

100 g Hackfleisch kosten 70 Ct.

·3 300 g Hackfleisch kosten **2,1 €.** ·3

Wenn dem Doppelten, Dreifachen, … einer Größe das Doppelte, Dreifache, … einer anderen Größe entspricht, kann man aus drei Angaben auf einen **vierten** Wert schließen. Das Verfahren nennt man **Schlussrechnung** oder **Dreisatz**.

Bsp. mit kürzerer Schreibweise: Um welchen Winkel dreht sich der große Zeiger in 25 min?

a) Schluss auf die Einheit oder b) Mit Hilfe eines geeigneten Teilers

	Zeitdauer	Winkel
	60 min	360°
Schluss auf die Einheit:	1 min	6°
	25 min	150°

	Zeitdauer	Winkel
	60 min	360°
geeigneter Teiler:	5 min	30°
	25 min	150°

Antwort: Der große Zeiger dreht sich in 25 min um 150°.

Maßstab

Der **Maßstab** gibt an, wie sehr ein Plan oder Modell die Längen im Vergleich zur Wirklichkeit verändert. 1:50000 („eins zu fünfzigtausend") bedeutet: 1 cm auf der Karte entspricht in Wirklichkeit $50\,000\,cm \left(=500\,m\right)$.

Aufgabentypen:

Typ 1) Berechnung der wirklichen Länge

Bsp.: geg.: Maßstab 1 : 20 000
Länge im Plan $4{,}2\,cm$

Lsg.:

Plan	Wirklichkeit
$1\,cm$	$20\,000\,cm$
$4{,}2\ cm$	$84\,000\,cm = 840\,m$

Typ 2) Berechnung der Länge im Plan

Bsp.: geg.: Maßstab 1 : 20 000
Länge in Wirklichkeit 15 km

Lsg.:

Wirklichkeit	Plan
$20\,000\,cm = 200\,m$	$1\,cm$
$1\,km$	$5\,cm$
$15\,km$	$75\,cm$

Typ 3) Berechnung des Maßstabs

Bsp.: geg.: Länge in Wirklichkeit 5 km
Länge im Plan $20\,cm$

Lsg.:

Plan	Wirklichkeit
$20\,cm$	$5\,km = 5000\,m$
$1\,cm$	$250\,m = 25\,000\,cm$

Antw.: Der Maßstab ist 1 : 25000.

Größen

Automasse: $m = 1{,}35\ t$

Symbol Maßzahl Einheit

Umrechnungen :

Länge s	Zeit t	Masse m	Flächeninhalt A	Geld
$1\,cm = 10\,mm$	$1\min = 60\,s$	$1\,g = 1000\,mg$	$1\,cm^2 = 100\,mm^2$	$1\,€ = 100\,Ct$
$1\,dm = 10\,cm$	$1\,h = 60\min$	$1\,kg = 1000\,g$	$1\,dm^2 = 100\,cm^2$	
$1\,m = 10\,dm$	$1\,d = 24\,h$	$1\,t = 1000\,kg$	$1\,m^2 = 100\,dm^2$	
$1\,km = 1000\,m$	$1\,a = 365\,d$		$1\,a = 100\,m^2$	
			$1\,ha = 100\,a$	
			$1\,km^2 = 100\,ha$	

Aufgabe : Schreibe in gemischten Einheiten, in Kommaschreibweise und kommafrei mit Hilfe einer Einheitentafel.

	km			m	dm	cm	mm	Schreibweise
1	7	0	0	8				$17\,km\,8\,m = 17{,}008\,km = 17\,008\,m$;
			1	3	0	2	5	$13\,m\,2\,cm\,5\,mm = 13{,}025\,m = 13025\,mm$;

Rechnen mit Größen

Damit du Größen **addieren** oder **subtrahieren** kannst, solltest du sie vorher auf die gleiche Einheit bringen.

Bsp.: $21{,}5\,kg + 1340\,g = 21500\,g + 1340\,g = 22840\,g = 22{,}84\,kg$;

Beim **Multiplizieren** oder **Dividieren** von Größen solltest du Folgendes beachten:

"Größe" · "Zahl" = "Größe" $3\min 20\,s \cdot 4 = 12\min 80\,s = 13\min 20\,s$;

"Größe":"Zahl" = "Größe" $2\,€ : 20 = 200\,Ct : 20 = 10\,Ct = 0{,}10\,€$;

"gleiche Größe":"gleiche Größe" = "Zahl" $2\,m : 20\,mm = 2000\,mm : 20\,mm = 100$;

Strategie: „Mit einem Gegenbeispiel widerlegen“

Eine Aussage über eine Menge von Objekten ist widerlegt, wenn man zeigen kann, dass sie für ein Objekt falsch ist.

Beispiel: Überprüfe folgende Aussage: „Jede natürliche Zahl hat eine natürliche Zahl als Vorgänger.“

Lösung: Die Aussage ist falsch.
Begründung mit *Gegenbeispiel*: Die natürliche Zahl 1 hat 0 als Vorgänger und 0 ist keine natürliche Zahl.

Strategie: „Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten“

Vorwärtsarbeiten	Rückwärtsarbeiten
Ich beginne mit der Ausgangssituation und rechne Schritt für Schritt Richtung Ziel.	Ich beginne bei der Endsituation und rechne Schritt für Schritt zurück.

Aufgabe 1: Subtrahiere von -15 die Zahl 9, addiere dann 33 und dividiere dann mit 3. Berechne das Ergebnis.

Lsg.: Strategie "Vorwärtsarbeiten":
$(-15 - 9 + 33) : 3 = 3$;

Aufgabe 2: Gesucht ist eine Zahl, für die gilt: Wenn du zu der gesuchten Zahl 25 addierst und das Ergebnis mit 3 multiplizierst, erhälst du die Zahl 99. Berechne die gesuchte Zahl.

Lsg.: Strategie "Rückwärtsarbeiten":
$99 : 3 = 33$;
$33 - 25 = 8$;
Antw.: Die gesuchte Zahl ist 8.

Strategie: „Systematisches Probieren“

Man versucht die Lösung durch Probieren zu finden. Um systematisch und übersichtlich vorzugehen, fertigt man eine Tabelle an.

Bsp.: Es sind dreimal so viele weiße wie schwarze Schafe. Außerdem ist die Gesamtzahl der weißen Schafe um 34 größer als die der schwarzen Schafe. Ermittle, wie viele Schafe es insgesamt sind.

Lsg.: Strategie „Systematisches Probieren“

	# schwarze Schafe	# weiße Schafe	Differenz	
1. Versuch	10	30	20	zu wenig ☹
2. Versuch	20	60	40	zu viel ☹
3. Versuch	17	51	34	passt ☺

- Diesen Grundwissenskatalog solltest du in deinen Grundwissensordner abheften.
- Der Grundwissenskatalog bietet dir eine Übersicht über die wichtigsten Themen des letzten Schuljahres.
- Für die **Grundwissensaufgabe** in der **Schulaufgabe** solltest du zu den einzelnen Themen bei Bedarf noch Übungsaufgaben machen. Hierzu empfehlen wir dir die für HGF-Schüler kostenlose Lernplattform www.mathegym.de (Stand: Schuljahr 17/18).